Die Vielteilchen-T-Matrix und ihre Anwendung in der Theorie realer Gase von mittlerer Dichte

I. Ableitung einer Transportgleichung

K. Baerwinkel

Institut für Theoretische Physik der Universität Marburg

(Z. Naturforsch. **24 a**, 22—37 [1969]; eingegangen am 16. Juli 1968)

The formalism of the many-body T matrix suitable for application in nonequilibrium is presented. The corresponding approximation together with a density-expansion is applied to the general equation of motion due to Kadanoff-Baym. Correction terms to the Boltzmann-Landau equation are obtained.

1. Einführung

Eines der wichtigsten Ergebnisse dieser Arbeit besteht darin, daß das Verhalten von realen Gasen mittlerer Dichte durch eine Transportgleichung erfaßt wird, die als eine sehr weitgehende Verallgemeinerung der Boltzmann-Gleichung angesehen werden kann. Die Herleitung beruht auf den exakten quantenmechanischen Grundgleichungen und enthält nur wenige, dabei recht allgemeine und physikalisch interpretierbare Näherungen. Die Transportgleichung selber ist noch verhältnismäßig einfachen Methoden zur weiteren Auswertung zugänglich und liefert so konkrete Aussagen z. B. über Transportkoeffizienten.

Wir behandeln ein quantenmechanisches Vielkörpersystem aus ununterscheidbaren strukturlosen Teilchen mit dem Hamilton-Operator

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\psi^+(\boldsymbol{r})\,\nabla^2\,\psi(\boldsymbol{r}) + \tfrac{1}{2}\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}_1 \mathrm{d}\boldsymbol{r}_2 \mathrm{d}\boldsymbol{r}_1' \mathrm{d}\boldsymbol{r}_2' \langle \boldsymbol{r}_1 \boldsymbol{r}_2 | w | \boldsymbol{r}_1' \boldsymbol{r}_2' \rangle\, \psi^+(\boldsymbol{r}_1)\,\psi^+(\boldsymbol{r}_2)\,\psi(\boldsymbol{r}_2')\,\psi(\boldsymbol{r}_1'), \tag{1}$$

wobei wir uns auf Zweiteilchenwechselwirkungen w beschränken, die translationsinvariant und Galilei-invariant sind, so daß man in Ortsdarstellung

$$\langle \boldsymbol{r}_1 \boldsymbol{r}_2 | w | \boldsymbol{r}_1' \boldsymbol{r}_2' \rangle = \langle \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2 | w | \boldsymbol{r}_1' - \boldsymbol{r}_2' \rangle\, \delta\left(\frac{\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2}{2} - \frac{\boldsymbol{r}_1' + \boldsymbol{r}_2'}{2}\right) \tag{2}$$

und in Impulsdarstellung

$$\langle \boldsymbol{p}_1 \boldsymbol{p}_2 | w | \boldsymbol{p}_1' \boldsymbol{p}_2' \rangle = \left\langle \frac{\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2}{2} \right| w \left| \frac{\boldsymbol{p}_1' - \boldsymbol{p}_2'}{2} \right\rangle \delta(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_1' - \boldsymbol{p}_2') \tag{3}$$

schreiben kann. Gebundene Zustände sollen nicht vorkommen. Ausgangspunkt ist dann die Theorie der Greenschen Funktionen nach Kadanoff-Baym[1]. Die bekannte Kadanoff-Baymsche „Boltzmann-Gleichung" enthält bereits eine einschneidende Näherung, und zwar die Voraussetzung der Langwelligkeit: Es wird angenommen, das physikalische System sei in Gebieten von der Größe des Wechselwirkungsbereiches eines Teilchens praktisch homogen. Damit ist schon ein wesentlicher Schritt zur makroskopischen Beschreibungsweise getan, wenn man an Gase denkt, bei denen die Reichweite der Zweiteilchenwechselwirkung einige 10^{-8} cm beträgt. Allerdings werden wir die langwellige Näherung wesentlich weiter treiben als Kadanoff und Baym. Wir werden nämlich die zeitliche Ableitung der Verteilungsfunktion $f(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}; t)$ so ausdrücken, daß nicht das gesamte räumlich-zeitliche Verhalten von f eingeht, sondern nur die Funktionswerte an der Stelle $\boldsymbol{r}$, t selber sowie die ersten Ableitungen nach Ort und Zeit, genommen bei $\boldsymbol{r}$, t. Dagegen tragen bei Kadanoff-Baym auch noch alle anderen Koordinaten $\boldsymbol{r}'$, t' bei.

Außerdem führen wir noch die $\mathscr{T}$-Matrix-Näherung (Vielteilchen-T-Matrix) ein, die anscheinend für Gase charakteristisch ist und alle Effekte be-

[1] L. P. Kadanoff u. G. Baym, Quantum Statistical Mechanics. W. A. Benjamin Inc., New York 1962.

rücksichtigt, die auf paarweiser Wechselwirkung beruhen, auch den Einfluß „abgebrochener" Zweierstöße. Es erscheint nicht unvernünftig, gegenüber allen Möglichkeiten paarweiser Wechselwirkung die echten Dreierstöße zu vernachlässigen. KADANOFF- und BAYM haben selber z.B. in [2] eine Auswertung ihrer grundlegenden Gleichung in $\mathscr{T}$-Näherung angekündigt. Dem Verfasser ist jedoch keine entsprechende Arbeit bekanntgeworden. Die $\mathscr{T}$-Matrix-Näherung ist auch schon in [1] skizziert, allerdings nur für den Spezialfall des Gleichgewichts. Deshalb wird hier eine Darstellung der $\mathscr{T}$-Matrix-Theorie gegeben, die auch für das Nichtgleichgewicht brauchbar ist.

Zu dieser typischen Gasnäherung, die wir in die Kadanoff-Baymsche Gleichung einarbeiten, kommt dann noch eine Dichteentwicklung hinzu, d.h. die Gleichung wird in zweiter Ordnung bezüglich der Verteilungsfunktion $f(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}; t)$ ausgewertet. Unsere endgültige Bewegungsgleichung erscheint als eine durch zusätzliche Korrekturterme verbesserte Landau-Gleichung.

Die von LANDAU [3] aufgestellte Transportgleichung ist — wiederum nach der Methode der Greenschen Funktionen — für Quantenflüssigkeiten tiefer Temperatur durch die mikroskopische Theorie begründet worden [1, 4].

Für Gase wurde eine Gleichung vom Landau-Typ von GROSSMANN und BAERWINKEL [5] hergeleitet, wie sie ähnlich GROSSMANN [6, 7, 8, 9] schon früher der Beschreibung realer Gase zugrunde gelegt hatte. Die Ergebnisse dieser Theorie sind allerdings noch korrekturbedürftig. Entnimmt man z.B. in naiver Weise der Kontinuitätsgleichung für die Impulsdichte

$$\partial_t \int p_\nu f(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}; t)\, \mathrm{d}\boldsymbol{p} + \partial_{x_\mu} \Pi_{\nu\mu}(\boldsymbol{r}, t) = 0 \tag{4}$$

den Drucktensor $\Pi_{\nu\mu}$, so ist damit auch speziell der Gleichgewichtsdruck bekannt. Die gewöhnliche Boltzmann-Gleichung liefert nach diesem Verfahren nur den Druck des klassischen idealen Gases; mit anderen Worten: Der zweite Virialkoeffizient $B(T)$ und alle höheren Virialkoeffizienten verschwinden. Aus der Landau-Gleichung nach [7] folgt dagegen

$$B(T) = B_1(T) \text{ mit}$$

$$B_1(T) = \sqrt{2}\, \lambda^3 \beta \int \mathrm{d}\boldsymbol{p}\, e^{-\beta E_p}\, \mathrm{Re} \langle \boldsymbol{p} | T_\pm(E_p + i\,O) | \boldsymbol{p} \rangle . \tag{5}$$

Hier ist — wie üblich —

$$\lambda = 2\pi\hbar (2\pi m \varkappa T)^{-1/2}$$

die thermische Wellenlänge und

$$E_p = p^2/m, \quad \beta^{-1} = \varkappa T$$

mit $\varkappa$ als Boltzmann-Konstante. Der Einfachheit halber wollen wir in dieser Arbeit zusätzlich zu (2) noch annehmen, daß w invariant ist gegenüber Raumspiegelung und Zeitumkehr. Die Zweiteilchen-T-Matrix besitzt dann folgende Symmetrieeigenschaft:

$$\langle \boldsymbol{p} | T(z) | \boldsymbol{p}' \rangle = \langle \boldsymbol{p}' | T(z) | \boldsymbol{p} \rangle = \langle -\boldsymbol{p} | T(z) | -\boldsymbol{p}' \rangle . \tag{6}$$

$\langle \boldsymbol{p} | T_\pm(z) | \boldsymbol{p}' \rangle$ ist die symmetrisierte T-Matrix. Im übrigen sei bezüglich $T(z)$ auf [10] verwiesen. Das exakte $B(T)$ ist nun von der Gleichgewichtstheorie her bekannt. In BAUMGARTLS [10] Schreibweise:

$$B(T) = B_0(T) + B_1(T) + B_2(T), \tag{7}$$

wobei

$$B_2(T) = -\sqrt{2}\, \lambda^3 \beta \pi \int \mathrm{d}\boldsymbol{p}\, \mathrm{d}\boldsymbol{q}\, \delta(E_p - E_q)\, e^{-\beta E_p} \cdot \mathrm{Im} [\langle \boldsymbol{q} | T_\pm(E_p + i\,O) | \boldsymbol{p} \rangle^* \langle \boldsymbol{q} | T_\pm'(E_p + i\,O) | \boldsymbol{p} \rangle]. \tag{8}$$

$$B_0(T) = \mp 2^{-5/2} \lambda^3 \tag{9}$$

ist der Virialkoeffizient des idealen Quantengases. Weil B_2 als einziger Anteil von B quadratisch in der T-Matrix ist und sogar eine Ableitung der T-Matrix enthält, könnte man vielleicht B_2 für relativ unwesentlich halten. BAUMGARTL [11] hat jedoch kürzlich durch numerische Rechnungen nachgewiesen, daß B_2 nicht vernachlässigt werden darf.

Die in dieser Arbeit abgeleitete Transportgleichung führt dagegen mit (4) zum vollen Virialkoeffizienten gemäß (7). Mit ihrer Hilfe werden auch Dichtekorrekturen zur Zähigkeit ausgerechnet, und zwar in enger Anlehnung an die von GROSSMANN [9] entwickelte Methode. Das dort erzielte Resultat für die Zähigkeit ist — wie BAUMGARTL [11] feststellt

[2] G. BAYM u. L. P. KADANOFF, Phys. Rev. **124**, 287 [1961].
[3] L. D. LANDAU, Sov. Phys.-JETP **3**, 920 [1957].
[4] R. A. CRAIG, Ann. Physics **40**, 434 [1966].
[5] K. BAERWINKEL u. S. GROSSMANN, Z. Phys. **198**, 277 [1967].
[6] S. GROSSMANN, Z. Phys. **180**, 286 [1964].
[7] S. GROSSMANN, Z. Phys. **182**, 24 [1964].
[8] S. GROSSMANN, Nuovo Cim. **37**, 698 [1965].
[9] S. GROSSMANN, Z. Naturforsch. **20a**, 861 [1965].
[10] B. J. BAUMGARTL, Z. Phys. **198**, 148 [1967].
[11] B. J. BAUMGARTL, Phys. Rev. **168**, 200 [1968].

— noch sehr unbefriedigend. Im Hinblick auf die erfolgreiche Berechnung von $B(T)$ ist zu erwarten, daß das Bild in der hier dargelegten Theorie wesentlich verbessert wird. Ob das tatsächlich der Fall ist, kann jedoch nur durch neue numerische Rechnungen entschieden werden.

2. Grundlagen

Anders als in der klassischen Physik ist in der Quantenmechanik schon die Definition einer Verteilungsfunktion ein Problem, weil Ort und Impuls inkommensurabel sind. Die Diskussion über dieses Thema ist noch nicht abgeschlossen und es gibt dazu auch neuere Arbeiten (z. B. [12]).

Wir benutzen die wohlbekannte Wigner-Funktion

$$f(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}; t) = (2\pi\hbar)^{-3} \int \mathrm{d}\boldsymbol{y} \exp\{-(i/\hbar)\,\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{y}\} \langle \psi^+(\boldsymbol{r} - \tfrac{1}{2}\boldsymbol{y}, t)\, \psi(\boldsymbol{r} + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{y}, t)\rangle, \tag{10}$$

die als Spezialfall „$s = 1$" der s-Teilchen-Verteilungsfunktionen

$$f_s(\boldsymbol{p}_1 \boldsymbol{r}_1, \dots, \boldsymbol{p}_s \boldsymbol{r}_s; t) \tag{11}$$
$$= (2\pi\hbar)^{-3s} \int \mathrm{d}\boldsymbol{y}_1 \dots \mathrm{d}\boldsymbol{y}_s \exp\{-(i/\hbar)\, \Sigma \boldsymbol{p}_i\cdot\boldsymbol{y}_i\} \Big\langle \psi^+\Big(\boldsymbol{r}_1 - \frac{\boldsymbol{y}_1}{2}\Big) \dots \psi^+\Big(\boldsymbol{r}_s - \frac{\boldsymbol{y}_s}{2}\Big)\, \psi\Big(\boldsymbol{r}_s + \frac{\boldsymbol{y}_s}{2}\Big) \dots \psi\Big(\boldsymbol{r}_1 + \frac{\boldsymbol{y}_1}{2}\Big)\Big\rangle_t$$

anzusehen ist. Aus der Vielzahl von Arbeiten, die sich mit den Wignerschen Funktionen befassen, ist wohl [13] z. Z. die neueste. Die in [5] nach geeignetem Abbrechen der Hierarchie von Bewegungsgleichungen für die f_s gewonnene Landau-Boltzmann-Gleichung

$$(\partial_t + \nabla_p\, \varepsilon(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}; t)\cdot\nabla_r - \nabla_r\, \varepsilon(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}; t)\cdot\nabla_p)\, f(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}; t) = J\,(\text{Boltzmann}) \tag{12}$$

wollen wir mit unseren späteren Ergebnissen vergleichen. Die Landau-Energie ist gegeben durch

$$\varepsilon(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}; t) = \frac{p^2}{2m} + \int F\Big(\frac{\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}}{2}\Big) f(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}; t)\, \mathrm{d}\boldsymbol{q} \tag{13}$$

mit

$$F(\boldsymbol{k}) = (2\pi\hbar)^3 \operatorname{Re} \langle \boldsymbol{k} | T_\pm(E_k + iO) | \boldsymbol{k}\rangle\,. \tag{14}$$

Auf der rechten Seite von (12) steht einfach das Boltzmannsche Stoßintegral mit dem quantenmechanischen Wirkungsquerschnitt σ:

$$\sigma(p, \vartheta) = \frac{m^2}{4} \cdot \frac{\pi}{\hbar} (2\pi\hbar)^3\, |\langle \boldsymbol{p} | T_\pm(E_p + iO) | \boldsymbol{p}'\rangle|^2; \tag{15}$$

ϑ bezeichnet hier den Winkel zwischen den Relativimpulsen $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}'$ zweier Teilchen vor und nach einem Stoß.

Ersetzt man in (12) ε durch $p^2/2m$, so liegt die gewöhnliche Boltzmann-Gleichung vor. Die von Großmann angegebene Landau-Gleichung erhält man, wenn im Stoßglied von (12) der Energiesatz für die Landau-Energien statt für die kinetischen Energien der Teilchen beachtet wird. Diese Verbesserung bedeutet, daß die Stöße zwischen zwei Teilchen in dem von den übrigen Teilchen erzeugten Feld betrachtet werden. In dieser Arbeit werden darüber hinaus noch Retardierungseffekte berücksichtigt, die eine Abweichung vom Energiesatz beim Zweiteilchenstoß mit sich bringen. Die physikalische Ursache dafür ist die endliche Dauer eines Stoßes, in dessen Verlauf sich das ganze Vielteilchen-Medium und damit auch das entsprechende mittlere Feld ändern kann. Außerdem wirkt sich die Ortsabhängigkeit dieses Feldes dadurch aus, daß sich zwei Teilchen während eines Stoßes fortbewegen.

Die Wigner-Funktion f hängt sehr eng mit den Greenschen Funktionen

$$g^{\gtrless}(\boldsymbol{p}E, \boldsymbol{r}t) = \int \frac{\mathrm{d}t'}{2\pi\hbar} \int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{(2\pi\hbar)^3}\, \tilde{g}^{\gtrless}(\boldsymbol{r}'t', \boldsymbol{r}t)\, e^{(i/\hbar)(Et' - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}')} \tag{16}$$

[12] T. S. Shankara, Prog. Theor. Phys. **37**, 1335 [1967].

[13] K. Imre, E. Özizmir, M. Rosenbaum u. P. Zweifel, J. Math. Phys. **8**, 1097 [1967].

zusammen. Hierbei ist definiert

$$\tilde{g}^{>}(\boldsymbol{r}'t', \boldsymbol{r}t) = \left\langle \psi\left(\boldsymbol{r} + \frac{\boldsymbol{r}'}{2}, t + \frac{t'}{2}\right) \psi^{+}\left(\boldsymbol{r} - \frac{\boldsymbol{r}'}{2}, t - \frac{t'}{2}\right)\right\rangle, \tag{17}$$

$$\tilde{g}^{<}(\boldsymbol{r}'t', \boldsymbol{r}t) = \left\langle \psi^{+}\left(\boldsymbol{r} - \frac{\boldsymbol{r}'}{2}, t - \frac{t'}{2}\right) \psi\left(\boldsymbol{r} + \frac{\boldsymbol{r}'}{2}, t + \frac{t'}{2}\right)\right\rangle. \tag{18}$$

Es gilt dann

$$f(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}; t) = \int \mathrm{d}E\, g^{<}(\boldsymbol{p}E, \boldsymbol{r}t) \tag{19}$$

und

$$n(\boldsymbol{r}, t) = \int \mathrm{d}E\, \mathrm{d}\boldsymbol{p}\, g^{<}(\boldsymbol{p}E, \boldsymbol{r}t) = \int \mathrm{d}\boldsymbol{p}\, f(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}; t) \tag{20}$$

ist die Teilchenzahldichte bei $\boldsymbol{r}$ zur Zeit t. Unter „Spektralfunktion" versteht man

$$a(\boldsymbol{p}E, \boldsymbol{r}t) = (2\pi\hbar)^3 (g^{>}(\boldsymbol{p}E, \boldsymbol{r}t) \mp g^{<}(\boldsymbol{p}E, \boldsymbol{r}t)). \tag{21}$$

Wichtig ist auch noch die „Trägerfunktion"

$$g(\boldsymbol{p}z, \boldsymbol{r}t) = \int \frac{\mathrm{d}E}{2\pi} \frac{a(\boldsymbol{p}E, \boldsymbol{r}t)}{z - E}. \tag{22}$$

Als Funktion von z hat sie einen Schnitt auf der reellen Achse. Der Realteil ändert sich beim Übergang über die reelle Achse stetig und ist auf der reellen Achse das Hauptwertintegral. Der Imaginärteil dagegen macht einen Sprung:

$$i(g(\boldsymbol{p}, E + iO; r, t) - g(\boldsymbol{p}, E - iO; r, t)) = a(\boldsymbol{p}E, \boldsymbol{r}t). \tag{23}$$

Vom Massen- oder Selbstenergieoperator ausgehend, hat man genau die gleichen Bildungen wie bei den Greenschen Funktionen zu betrachten:

$$\sigma(\boldsymbol{p}z, \boldsymbol{r}t) = \int \frac{\mathrm{d}E}{2\pi} \frac{\gamma(\boldsymbol{p}E, \boldsymbol{r}t)}{z - E} = \int \frac{\mathrm{d}E}{2\pi} \frac{(2\pi\hbar)^3 (\sigma^{>} \mp \sigma^{<})}{z - E}. \tag{24}$$

Damit sind wir nun in der Lage, die „Kadanoff-Baymsche" Gleichung zu formulieren. Das ist die in[1] als Verallgemeinerung der Boltzmann-Gleichung aufgestellte Bewegungsgleichung für $g^{<}(\boldsymbol{p}, E, \boldsymbol{r}t)$. Nach Abschalten der äußeren Störung, die unser physikalisches System aus dem Gleichgewicht gebracht hat, und nach Integration über E lautet sie:

$$\begin{aligned}
&(\partial_t + \nabla_{\boldsymbol{p}}\, \varepsilon^{\mathrm{Born}}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}; t) \cdot \nabla_{\boldsymbol{r}} - \nabla_{\boldsymbol{r}}\, \varepsilon^{\mathrm{Born}}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}; t) \cdot \nabla_{\boldsymbol{p}}) f(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}; t) \\
&\quad + 2\pi\hbar \int \mathrm{d}E\, \{[\mathrm{Re}\, g(\boldsymbol{p}E, \boldsymbol{r}t); \sigma^{<}(\boldsymbol{p}E, \boldsymbol{r}t)] - [\mathrm{Re}\, \sigma(\boldsymbol{p}E, \boldsymbol{r}t); g^{<}(\boldsymbol{p}E, \boldsymbol{r}t)]\} \\
&\quad = 2\pi(2\pi\hbar)^3 \int \mathrm{d}E\, \{\sigma^{<}(\boldsymbol{p}E, \boldsymbol{r}t) g^{>}(\boldsymbol{p}E, \boldsymbol{r}t) - \sigma^{>}(\boldsymbol{p}E, \boldsymbol{r}t) g^{<}(\boldsymbol{p}E, \boldsymbol{r}t)\}.
\end{aligned} \tag{25}$$

In unserer Schreibweise hier erinnert der erste Term schon sehr an die Landau-Gleichung (12). $\varepsilon^{\mathrm{Born}}$ erhält man, wenn man in der Landau-Energie die T-Matrix durch ihre Bornsche Näherung ersetzt:

$$\varepsilon^{\mathrm{Born}}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}; t) = \frac{p^2}{2m} + (2\pi\hbar)^3 \int \left\langle \frac{\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}}{2} \right| w_{\pm} \left| \frac{\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}}{2} \right\rangle f(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}; t)\, \mathrm{d}\boldsymbol{q}. \tag{26}$$

Das Symbol $[X; Y]$ ist die „Poisson-Klammer" aus[1], d.h.

$$[X; Y] = \partial_E X\, \partial_t Y - \partial_t X\, \partial_E Y - \nabla_{\boldsymbol{p}} X \cdot \nabla_{\boldsymbol{r}} Y + \nabla_{\boldsymbol{r}} X \cdot \nabla_{\boldsymbol{p}} Y. \tag{27}$$

Zu (25) gehört noch die Beziehung

$$g(\boldsymbol{p}z, \boldsymbol{r}t)(z - \varepsilon^{\mathrm{Born}}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}; t) - 2\pi\hbar\, \sigma(\boldsymbol{p}z, \boldsymbol{r}t)) = \frac{1}{2\pi}. \tag{28}$$

3. Der Landau-Anteil der Kadanoff-Baymschen Gleichung; die verallgemeinerte Dichte $g^{<}$ bei kleiner Teilchenzahldichte n

Aus (23) und (28) folgt unmittelbar

$$\begin{aligned}
a(\boldsymbol{p}E, \boldsymbol{r}t) = \frac{i}{2\pi} \Big\{ &\Big[E - \varepsilon^{\mathrm{Born}}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}; t) - 2\pi\hbar\, \mathrm{Re}\, \sigma(\boldsymbol{p}E, \boldsymbol{r}t) + \frac{i}{2} 2\pi\hbar\gamma(\boldsymbol{p}E, \boldsymbol{r}t) + iO\Big]^{-1} \\
&- \Big[E - \varepsilon^{\mathrm{Born}}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}; t) - 2\pi\hbar\, \mathrm{Re}\, \sigma(\boldsymbol{p}E, \boldsymbol{r}t) - \frac{i}{2} 2\pi\hbar\gamma(\boldsymbol{p}E, \boldsymbol{r}t) - iO\Big]^{-1} \Big\}.
\end{aligned} \tag{29}$$

Mit $\sigma^{\gtrless}(\boldsymbol{p}E, \boldsymbol{r}t)$ sind auch $\gamma(\boldsymbol{p}E, \boldsymbol{r}t)$ und $\sigma(\boldsymbol{p}z, \boldsymbol{r}t)$ in $g^{<}$ und in der Wechselwirkung w von mindestens erster Ordnung. Daher wird (29) für $w \to 0$ oder $g^{<} \to 0$ (Kleindichtelimes!) sehr einfach:

$$a(\boldsymbol{p}\,E, \boldsymbol{r}\,t) \to \frac{i}{2\pi}\left(\frac{1}{E-(p^2/2m)+iO} - \frac{1}{E-(p^2/2m)-iO}\right) = \delta(E - p^2/2m)\,. \tag{30}$$

Die volle Spektralfunktion stellen wir uns in bezug auf die E-Abhängigkeit als „verschmierte" δ-Funktion vor. Aus (29) geht hervor, daß das Maximum dieser Funktion an einer Stelle $E = E(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}; t)$ liegt, die als Lösung der Gleichung

$$E(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}; t) = \varepsilon^{\mathrm{Born}}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}; t) + 2\pi\hbar\,\mathrm{Re}\,\sigma(\boldsymbol{p}, E(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}; t); \boldsymbol{r}, t) \tag{31}$$

zu ermitteln ist, wenn γ entsprechend schwach von E abhängt. In erster Ordnung bezüglich $g^{<}$ ist auch $E(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}; t) = E_1(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}; t)$ richtig, wobei

$$E_1(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}; t) = \varepsilon^{\mathrm{Born}}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}; t) + 2\pi\hbar\,\mathrm{Re}\,\sigma_1(\boldsymbol{p}, p^2/2m; \boldsymbol{r}, t)\,. \tag{32}$$

Re σ_1 soll der niedrigste Term der Entwicklung von Re σ nach $g^{<}$ bzw. (s. unten) nach f sein. Wir werden später sehen, daß E_1 in $\mathscr{T}$-Matrix-Näherung praktisch mit der Landau-Energie ε übereinstimmt.

Die Definition der Spektralfunktion gestattet übrigens folgende Darstellung:

$$g^{<}(\boldsymbol{p}E, \boldsymbol{r}t) = a(\boldsymbol{p}E, \boldsymbol{r}t)\,\varphi(\boldsymbol{p}E, \boldsymbol{r}t)\,, \quad g^{>}(\boldsymbol{p}E, \boldsymbol{r}t) = a(\boldsymbol{p}E, \boldsymbol{r}t)\,(1 \pm \varphi(\boldsymbol{p}E, \boldsymbol{r}t))\,. \tag{33}$$

Im Spezialfall des Gleichgewichtes ist φ bekannt und wird später in diesem Paragraphen noch genauer betrachtet. Im Hinblick auf (33) vermuten wir, daß $g^{<}$ ähnlich wie die Spektralfunktion in E auf einem engen Bereich lokalisiert ist, und formen jetzt einen Term in der Kadanoff-Baymschen Gleichung dieser Vorstellung entsprechend um:

$$\int \mathrm{d}E\,[\mathrm{Re}\,\sigma(\boldsymbol{p}E, \boldsymbol{r}t); g^{<}(\boldsymbol{p}E, \boldsymbol{r}t)] = \int \mathrm{d}E\,\{\nabla_{\boldsymbol{r}}\mathrm{Re}\,\sigma \cdot \nabla_{\boldsymbol{p}} g^{<} - \nabla_{\boldsymbol{p}}\mathrm{Re}\,\sigma \cdot \nabla_{\boldsymbol{r}} g^{<}\} + \partial_t \int \mathrm{d}E\,(\partial_E\,\mathrm{Re}\,\sigma)\,g^{<}.$$

Beim Summanden mit der zeitlichen Ableitung haben wir partiell integriert. Jetzt wenden wir den Mittelwertsatz der Integralrechnung an, was z.B. dann möglich ist, wenn $g^{<}$ außerhalb eines begrenzten Energieintervalles, wo es — bei festem $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}, t$ — sein Vorzeichen nicht ändert, genügend stark abfällt:

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}E\,(\partial_E\,\mathrm{Re}\,\sigma(\boldsymbol{p}, E, \boldsymbol{r}t))\,g^{<}(\boldsymbol{p}E, \boldsymbol{r}t) &= \partial_E\,\mathrm{Re}\,\sigma(\boldsymbol{p}E, \boldsymbol{r}t)|_{E=\tilde{E}} \cdot \int \mathrm{d}E\,g^{<}(\boldsymbol{p}E, \boldsymbol{r}t)\\ &= \partial_E\,\mathrm{Re}\,\sigma(\boldsymbol{p}E, \boldsymbol{r}t)|_{E=\tilde{E}} \cdot f(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}; t)\,.\end{aligned}$$

$\tilde{E}$ ist natürlich ein Funktional von $g^{<}$ und wir wissen $\tilde{E} \to p^2/2m$ mit $g^{<} \to 0$. In zweiter Ordnung in $g^{<}$ bzw. (s. unten) in f gilt also

$$\int \mathrm{d}E\,(\partial_E\,\mathrm{Re}\,\sigma(\boldsymbol{p}E, \boldsymbol{r}t))\,g^{<}(\boldsymbol{p}E, \boldsymbol{r}t) = \partial_E\,\mathrm{Re}\,\sigma(\boldsymbol{p}E, \boldsymbol{r}t)|_{E=p^2/2m} \cdot f(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}; t)\,.$$

Auf dieselbe Weise wird auch noch der Rest ausgewertet:

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}E\,\{\nabla_{\boldsymbol{r}}\mathrm{Re}\,\sigma \cdot \nabla_{\boldsymbol{p}} g^{<} - \nabla_{\boldsymbol{p}}\mathrm{Re}\,\sigma \cdot \nabla_{\boldsymbol{r}} g^{<}\} &= \nabla_{\boldsymbol{p}} \cdot \int \mathrm{d}E\,g^{<}\,\nabla_{\boldsymbol{r}}\mathrm{Re}\,\sigma - \nabla_{\boldsymbol{r}} \cdot \int \mathrm{d}E\,g^{<}\,\nabla_{\boldsymbol{p}}\mathrm{Re}\,\sigma\\ &= \nabla_{\boldsymbol{p}} \cdot \{f(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}; t)\,\nabla_{\boldsymbol{r}}\mathrm{Re}\,\sigma(\boldsymbol{p}, p^2/2m; \boldsymbol{r}, t)\} - \nabla_{\boldsymbol{r}}\{f(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}; t)\,\nabla_{\boldsymbol{p}}\mathrm{Re}\,\sigma(\boldsymbol{p}E, \boldsymbol{r}t)\}_{E=p^2/2m}\,.\end{aligned}$$

Da die rechte Seite von (33) wiederum ein Funktional von $g^{<}$ ist, sollte man vielleicht lieber eine Entwicklung nach f statt nach $g^{<}$ betrachten. Dazu stellen wir uns $g^{<}$ selber nach f entwickelt vor:

$$g^{<}(\boldsymbol{p}E, \boldsymbol{r}t) = \delta(E - [p^2/2m])\,f(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}; t) + \cdots. \tag{34}$$

Den Rest „..." brauchen wir hier nicht zu kennen, da wir in allen vorkommenden Entwicklungen niedrig genug bleiben. Im folgenden ist unter einer Entwicklung nach $g^{<}$ stets mit (34) die entsprechende Entwicklung nach f zu verstehen.

Bis auf Terme von höherer als zweiter Ordnung bezüglich f, also in der Näherung, der wir noch die ganze Kadanoff-Baymsche Gleichung unterwerfen wollen, haben wir nun das Zwischenergebnis

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}E\,[\mathrm{Re}\,\sigma(\boldsymbol{p}E, \boldsymbol{r}t); g^{<}(\boldsymbol{p}E, \boldsymbol{r}t)] &= \nabla_{\boldsymbol{p}} f(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}; t) \cdot \nabla_{\boldsymbol{r}}\mathrm{Re}\,\sigma(\boldsymbol{p}, p^2/2m; \boldsymbol{r}, t)\\ &\quad - \nabla_{\boldsymbol{p}}\mathrm{Re}\,\sigma(\boldsymbol{p}, p^2/2m; \boldsymbol{r}, t) \cdot \nabla_{\boldsymbol{r}} f(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}; t) + (\partial_t + (\boldsymbol{p}/m) \cdot \nabla_{\boldsymbol{r}})\{f(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}; t)\,\partial_E\,\mathrm{Re}\,\sigma(\boldsymbol{p}E, \boldsymbol{r}t)\}_{E=p^2/2m}\,.\end{aligned}$$

Hiermit gehen wir in (25) ein und benutzen noch (32):

$$\begin{aligned}(\partial_t + \nabla_p E_1(\boldsymbol{p},\boldsymbol{r};t)\cdot\nabla_r - \nabla_r E_1(\boldsymbol{p},\boldsymbol{r};t)\cdot\nabla_p) f(\boldsymbol{p},\boldsymbol{r};t)\\ - (\partial_t + \boldsymbol{p}/m\cdot\nabla_r)\{2\pi\hbar\,\partial_E \operatorname{Re}\sigma(\boldsymbol{p}E,\boldsymbol{r}t)\, f(\boldsymbol{p},\boldsymbol{r};t)\}_{E=p^2/2m}\\ + 2\pi\hbar\int \mathrm{d}E\,[\operatorname{Re} g(\boldsymbol{p}E,\boldsymbol{r}t);\,\sigma^<(\boldsymbol{p}E,\boldsymbol{r}t)]\\ = 2\pi(2\pi\hbar)^3\int \mathrm{d}E\,\{\sigma^<(\boldsymbol{p}E,\boldsymbol{r}t)\,g^>(\boldsymbol{p}E,\boldsymbol{r}t) - \sigma^>(\boldsymbol{p}E,\boldsymbol{r}t)\,g^<(\boldsymbol{p}E,\boldsymbol{r}t)\}.\end{aligned} \tag{35}$$

Der erste Ausdruck hat die allgemeine Gestalt des Landauschen Strömungsgliedes.

Im Gleichgewicht werden wir die uns interessierenden Größen nicht nach der verallgemeinerten Dichte $g^<$, sondern nach der Teilchenzahldichte n entwickeln. In diesem Spezialfall hängt $g^<$ nur von p und E ab, nämlich (s. [1])

$$g^<(p,E) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\,\frac{1}{e^{\beta(E-\mu)}\mp 1}\,a(p,E). \tag{36}$$

Vom chemischen Potential spalten wir den Anteil μ^{id} des idealen Gases ab: $\mu = \mu^{\text{id}} + \mu^{\text{int}}$.
Der Wechselwirkungsanteil μ^{int} wird $\sim n^2$ gegen Null gehen, und für ideale Quantengase wissen wir (s. z.B. [14])

$$z^{\text{id}} = \exp(\beta\mu^{\text{id}}) = \lambda^3 n \mp 2^{-3/2}(\lambda^3 n)^2 + O(n^3). \tag{37}$$

Damit folgt

$$\frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\,\frac{1}{e^{\beta(E-\mu)}\mp 1} = n(2\pi m\varkappa T)^{-3/2} e^{-\beta E} \mp \lambda^3 n^2 (2\pi m\varkappa T)^{-3/2} e^{-\beta E}(2^{-3/2} - e^{-\beta E}) + O(n^3). \tag{38}$$

Die Spektralfunktion $a(p,E)$ muß auch nach der Dichte entwickelt werden. Ausgehend von (29), erhalten wir

$$\begin{aligned}\partial_n a(p,E)\big|_{n=0} &= \alpha(p,E) \\ &\equiv -\delta'\left(E - \frac{p^2}{2m}\right)\partial_n(\varepsilon^{\text{Born}}(p) + 2\pi\hbar\operatorname{Re}\sigma(p,E))\big|_{n=0} - \frac{1}{2\pi}\,\frac{\mathscr{P}}{E-p^2/2m}\,\partial_n 2\pi\hbar\,\gamma(p,E)\big|_{n=0}.\end{aligned} \tag{39}$$

Mit

$$\frac{\mathscr{P}}{x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+iO} + \frac{1}{x-iO}\right)$$

wird die Distribution „Hauptwert" bezeichnet.

An der Definition von $\sigma(\boldsymbol{p}z,\boldsymbol{r}t)$ erkennt man

$$\int \mathrm{d}E\,\alpha(p,E) = 0,$$

wie es wegen der auch im Nichtgleichgewicht geltenden Normierungsbedingung

$$\int \mathrm{d}E\,a(\boldsymbol{p}E,\boldsymbol{r}t) = 1$$

ja sein muß.

Unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse können wir jetzt $g^<$ entwickeln:

$$g^<(p,E) = n\,h_1(p,E) + n^2 h_2(p,E) + O(n^3),\quad h_1(p,E) = (2\pi m\varkappa T)^{-3/2} e^{-\beta(p^2/2m)}\,\delta(E - p^2/2m) \tag{40}$$

$$h_2(p,E) = (2\pi m\varkappa T)^{-3/2} e^{-\beta E}\,\alpha(p,E) \mp \lambda^3 h_1(p,E)\,(2^{-3/2} - e^{-\beta(p^2/2m)}) \tag{41}$$

Man rechnet leicht nach, daß der zweite Summand von h_2 bei Integration über $\boldsymbol{p}$ und E verschwindet. Die Normierung $\int \mathrm{d}E\,\mathrm{d}\boldsymbol{p}\,g^< = n$ hat also

$$\int \mathrm{d}E\,\mathrm{d}\boldsymbol{p}\,e^{-\beta E}\alpha(p,E) = 0 \tag{42}$$

zur Folge. Um dies explizit zu zeigen, benötigt man anscheinend genauere Kenntnisse über den Massenoperator. Durch die $\mathscr{T}$-Näherung, die wir später anwenden, wird (42) verletzt (s. Abschnitt 5). Die richtige Normierung von $g^<$ wollen wir deshalb dadurch garantieren, daß wir $g^<$ als

$$g^<(p,E) = \frac{g^<(p,E)}{1/n\int \mathrm{d}E'\,\mathrm{d}\boldsymbol{p}'\,g^<(p',E')} = \frac{n\,h_1(p,E) + n^2 h_2(p,E) + \cdots}{\int \mathrm{d}E'\,\mathrm{d}\boldsymbol{p}'\{h_1(p',E') + n\,h_2(p',E') + \cdots\}}$$

[14] K. Huang, Statistical Mechanics, J. Wiley and Sons Inc., New York 1963.

entwickeln. Also:

$$g^<(p, E) = n h_1(p, E) + n^2 \{h_2(p, E) - h_1(p, E) \cdot (2\pi m \varkappa T)^{-3/2} \int dE' \, d\boldsymbol{p}' \, e^{-\beta E'} \alpha(p', E')\}. \tag{43}$$

4. Formalismus der Vielteilchen-T-Matrix

Zur Einführung der Vielteilchen-T-Matrix gehen wir von den komplexzeitigen Greenschen Funktionen $G(11'; U; t_0)$, $G_2(12, 1'2'; U; t_0)$ aus, wie sie in [1] definiert sind. Die Abhängigkeit von dem willkürlich zu wählenden reellen Zeitpunkt t_0 und der äußeren Quelle U werden wir in unserer Schreibweise unterdrücken. Der Massen- oder Selbstenergieoperator Σ ist dann durch

$$\Sigma(12)\, G(21') = \pm i\, W(12, 34)\, G_2(43, 21') \tag{44}$$

gegeben. Wie üblich ist hier in den Argument-Ziffern jeweils eine Raum- und eine Zeitkoordinate zusammengefaßt. Bei doppelt vorkommenden Ziffern ist über den ganzen Ortsraum und zeitlich über einen Weg von t_0 bis $t_0 - i\hbar\beta$ zu integrieren. Unter W ist

$$W(12, 34) = \langle \boldsymbol{r}_1 \boldsymbol{r}_2 | w | \boldsymbol{r}_3 \boldsymbol{r}_4 \rangle \, \delta(t_1 - t_2)\, \delta(t_2 - t_3)\, \delta(t_3 - t_4) \tag{45}$$

zu verstehen. Der Massenoperator ist dann im Prinzip aus der Gleichung

$$\Sigma(11') = \Sigma^{\mathrm{HF}}(11') + i\, W(12, 34)\, G(35)\, \frac{\delta \Sigma(51')}{\delta U(24)} \tag{46}$$

mit

$$\Sigma^{\mathrm{HF}}(11') = i\,(W(12, 31') \pm W(12, 1'3))\, G(32) \tag{47}$$

zu bestimmen. Wenn wir auf der rechten Seite von (46) $\Sigma = \Sigma^{\mathrm{HF}}$ setzen, haben wir die Bornsche Näherung des Massenoperators. Die entsprechende Näherung für G_2 lautet

$$\begin{aligned} G_2{}^{\mathrm{Born}}(12, 34) = {} & G(13)\, G(24) \pm G(14)\, G(23) \\ & + (i/\hbar)\, G(15)\, G(26)\, W(56, 78)\, [G(73)\, G(84) \pm G(74)\, G(83)]. \end{aligned} \tag{48}$$

$G_2{}^{\mathrm{Born}}$ erhalten wir offensichtlich auch, wenn wir folgende Gleichung einmal iterieren:

$$G_2(12, 34) = G(13)\, G(24) \pm G(14)\, G(23) + (i/\hbar)\, G(15)\, G(26)\, W(56, 78)\, G_2(78, 34). \tag{49}$$

Um die dieser Gleichung entsprechende Näherung für den Massenoperator zu untersuchen, hätte man WG_2 zu betrachten [(44)!]. In Operatorschreibweise erhalten wir mit der formalen Lösung von (49):

$$WG_2 = \{W + WGG(i/\hbar)\, W + WGG(i/\hbar)\, WGG(i/\hbar)\, W + \cdots\}\, (GG \pm GG). \tag{50}$$

Der Inhalt der geschweiften Klammer wird mit $\mathscr{T}$ bezeichnet. Man sieht sofort, daß

$$\mathscr{T} = W + (i/\hbar)\, \mathscr{T} GGW = W + (i/\hbar)\, WGG\mathscr{T} \tag{51}$$

gilt. Ausführlich geschrieben, lautet hier die erste Gleichung

$$\begin{aligned} \langle 12 | \mathscr{T} | 1'2' \rangle = {} & \delta(t_1 - t_2)\, \delta(t_1' - t_2')\, \delta(t_1 - t_1')\, \langle \boldsymbol{r}_1 \boldsymbol{r}_2 | w | \boldsymbol{r}_1' \boldsymbol{r}_2' \rangle \\ & + (i/\hbar) \int d3\, d4 \int d\boldsymbol{r}_5\, d\boldsymbol{r}_6\, \langle 12 | \mathscr{T} | 34 \rangle\, G(3, \boldsymbol{r}_5 t_1')\, G(4, \boldsymbol{r}_6 t_1')\, \langle \boldsymbol{r}_5 \boldsymbol{r}_6 | w | \boldsymbol{r}_1' \boldsymbol{r}_2' \rangle\, \delta(t_1' - t_2'). \end{aligned} \tag{52}$$

Die $\mathscr{T}$-Matrix hat also folgende Struktur:

$$\begin{aligned} \langle 12 | \mathscr{T} | 1'2' \rangle = {} & \delta(t_1 - t_2)\, \delta(t_1' - t_2')\, \{\langle \boldsymbol{r}_1 \boldsymbol{r}_2 | w | \boldsymbol{r}_1' \boldsymbol{r}_2' \rangle\, \delta(t') \\ & + \Theta(t')\, \langle \boldsymbol{r}_1 \boldsymbol{r}_2 | \tilde{T}^>(t, t') | \boldsymbol{r}_1' \boldsymbol{r}_2' \rangle + \Theta(-t')\, \langle \boldsymbol{r}_1 \boldsymbol{r}_2 | \tilde{T}^<(t, t') | \boldsymbol{r}_1' \boldsymbol{r}_2' \rangle\}. \end{aligned} \tag{53}$$

Hier haben wir die üblichen Relativ- und Schwerpunktszeiten

$$t = \tfrac{1}{2}(t_1 + t_1'), \quad t' = t_1 - t_1'$$

sowie die Heavisidesche Sprungfunktion Θ benutzt. Nach dem Grenzübergang zu reellzeitigen Funktionen (hierbei wird der Limes $t_0 \to -\infty$ durchgeführt und als äußere Quelle U auf der reellen Achse die physikalische Störung gewählt) transformieren wir $\tilde{T}^{\gtrless}$:

$$\langle \boldsymbol{r}_1 \boldsymbol{r}_2 | T^{\gtrless}(t, E) | \boldsymbol{r}_1' \boldsymbol{r}_2' \rangle =: i \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \boldsymbol{r}_1 \boldsymbol{r}_2 | \tilde{T}^{\gtrless}(t, t') | \boldsymbol{r}_1' \boldsymbol{r}_2' \rangle e^{i/\hbar E t'} \mathrm{d}t'. \tag{54}$$

An (52), (53) ist abzulesen, daß $\tilde{T}^{<}$ mindestens von zweiter Ordnung in $G^{<}$ ist und damit $T^{<}$ von zweiter Ordnung in $g^{<}$ für $g^{<} \to 0$. Dagegen gilt mit $g^{<} \to 0$: $T^{>} \to T_0 \not\equiv 0$. Dies wird später noch explizit angegeben.

Wir müssen nun zu einer genaueren Kenntnis der Größen $\tilde{T}^{\gtrless}$ bzw. $T^{\gtrless}$ gelangen. Zu diesem Zweck drücken wir z.B. $\tilde{T}^{>}$ durch (52) aus und gehen dabei auf der rechten Seite mit (53) ein:

$$\begin{aligned}
(\hbar/i) \langle \boldsymbol{r}_1 \boldsymbol{r}_2 | \tilde{T}^{>}(t, t') | \boldsymbol{r}_1' \boldsymbol{r}_2' \rangle &= \int \mathrm{d}\boldsymbol{r}_3 \ldots \mathrm{d}\boldsymbol{r}_6 \langle \boldsymbol{r}_1 \boldsymbol{r}_2 | w | \boldsymbol{r}_3 \boldsymbol{r}_4 \rangle G^{>}(\boldsymbol{r}_3 t_1, \boldsymbol{r}_5 t_1') G^{>}(\boldsymbol{r}_4 t_1, \boldsymbol{r}_6 t_1') \langle \boldsymbol{r}_5 \boldsymbol{r}_6 | w | \boldsymbol{r}_1' \boldsymbol{r}_2' \rangle \\
&+ \int \mathrm{d}\boldsymbol{r}_3 \ldots \mathrm{d}\boldsymbol{r}_6 \int_{t_0}^{t_1'} \mathrm{d}t_3 \langle \boldsymbol{r}_1 \boldsymbol{r}_2 | \tilde{T}^{>}\left(\frac{t_1 + t_3}{2}, t_1 - t_3\right) | \boldsymbol{r}_3 \boldsymbol{r}_4 \rangle G^{<}(3, \boldsymbol{r}_5 t_1') G^{<}(\boldsymbol{r}_4 t_3, \boldsymbol{r}_6 t_1') \langle \boldsymbol{r}_5 \boldsymbol{r}_6 | w | \boldsymbol{r}_1' \boldsymbol{r}_2' \rangle \\
&+ \int \mathrm{d}\boldsymbol{r}_3 \ldots \mathrm{d}\boldsymbol{r}_6 \int_{t_1'}^{t_1} \mathrm{d}t_3 \langle \boldsymbol{r}_1 \boldsymbol{r}_2 | \tilde{T}^{>}\left(\frac{t_1 + t_3}{2}, t_1 - t_3\right) | \boldsymbol{r}_3 \boldsymbol{r}_4 \rangle G^{>}(3, \boldsymbol{r}_5 t_1') G^{>}(\boldsymbol{r}_4 t_3, \boldsymbol{r}_6 t_1') \langle \boldsymbol{r}_5 \boldsymbol{r}_6 | w | \boldsymbol{r}_1' \boldsymbol{r}_2' \rangle \\
&+ \int \mathrm{d}\boldsymbol{r}_3 \ldots \mathrm{d}\boldsymbol{r}_6 \int_{t_1}^{t_0 - (i/\hbar)\beta} \mathrm{d}t_3 \langle \boldsymbol{r}_1 \boldsymbol{r}_2 | \tilde{T}^{<}\left(\frac{t_1 + t_3}{2}, t_1 - t_3\right) | \boldsymbol{r}_3 \boldsymbol{r}_4 \rangle G^{>}(3, \boldsymbol{r}_5 t_1') G^{>}(\boldsymbol{r}_4 t_3, \boldsymbol{r}_6 t_1') \langle \boldsymbol{r}_5 \boldsymbol{r}_6 | w | \boldsymbol{r}_1' \boldsymbol{r}_2' \rangle .
\end{aligned} \tag{55}$$

Jetzt ist der vorhin angegebene Grenzübergang zu reellzeitigen Funktionen durchzuführen. Das danach erreichte Zwischenergebnis für $\tilde{T}^{>}$ sieht ähnlich aus wie das für $\tilde{T}^{<}$, wenn wir mit $\tilde{T}^{<}$ analog verfahren. Diese beiden Gleichungen können wir deshalb zusammen aufschreiben:

$$\begin{aligned}
i \langle \boldsymbol{r}_1 \boldsymbol{r}_2 | \tilde{T}^{\gtrless}(t, t') | \boldsymbol{r}_1' \boldsymbol{r}_2' \rangle
&= \frac{1}{\hbar} \int \mathrm{d}\boldsymbol{r}_3 \ldots \mathrm{d}\boldsymbol{r}_6 \Big\{ \langle \boldsymbol{r}_1 \boldsymbol{r}_2 | w | \boldsymbol{r}_3 \boldsymbol{r}_4 \rangle \tilde{g}^{\gtrless}\left(\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_5, t'; \frac{\boldsymbol{r}_3 + \boldsymbol{r}_5}{2}, t\right) \tilde{g}^{\gtrless}\left(\boldsymbol{r}_4 - \boldsymbol{r}_6, t'; \frac{\boldsymbol{r}_4 + \boldsymbol{r}_6}{2}, t\right) \\
&+ \int_{-\infty}^{0} \mathrm{d}\tau \left\langle \boldsymbol{r}_1 \boldsymbol{r}_2 \middle| [\tilde{T}^{>} - \tilde{T}^{<}]\left(t + \frac{t' + \tau}{2}, -\tau\right) \middle| \boldsymbol{r}_3 \boldsymbol{r}_4 \right\rangle \tilde{g}^{\gtrless}\left(\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_5, t' + \tau; \frac{\boldsymbol{r}_3 + \boldsymbol{r}_5}{2}, t + \frac{\tau}{2}\right) \\
&\qquad \cdot \tilde{g}^{\gtrless}\left(\boldsymbol{r}_4 - \boldsymbol{r}_6, t' + \tau; \frac{\boldsymbol{r}_4 + \boldsymbol{r}_6}{2}, t + \frac{\tau}{2}\right) \Big\} \langle \boldsymbol{r}_5 \boldsymbol{r}_6 | w | \boldsymbol{r}_1' \boldsymbol{r}_2' \rangle \\
&- \frac{1}{\hbar} \int \mathrm{d}\boldsymbol{r}_3 \ldots \mathrm{d}\boldsymbol{r}_6 \int_{-\infty}^{0} \mathrm{d}\tau \left\langle \boldsymbol{r}_1 \boldsymbol{r}_2 \middle| \tilde{T}^{\gtrless}\left(t + \frac{\tau}{2}, t' - \tau\right) \middle| \boldsymbol{r}_3 \boldsymbol{r}_4 \right\rangle \\
&\quad \cdot \Big[\tilde{g}^{>}\left(\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_5, \tau; \frac{\boldsymbol{r}_3 + \boldsymbol{r}_5}{2}, t - \frac{t' - \tau}{2}\right) \tilde{g}^{>}\left(\boldsymbol{r}_4 - \boldsymbol{r}_6, \tau; \frac{\boldsymbol{r}_4 + \boldsymbol{r}_6}{2}, t - \frac{t' - \tau}{2}\right) \\
&\quad - \tilde{g}^{<}\left(\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_5, \tau; \frac{\boldsymbol{r}_3 + \boldsymbol{r}_5}{2}, t - \frac{t' - \tau}{2}\right) \tilde{g}^{<}\left(\boldsymbol{r}_4 - \boldsymbol{r}_6, \tau; \frac{\boldsymbol{r}_4 + \boldsymbol{r}_6}{2}, t - \frac{t' - \tau}{2}\right) \Big] \langle \boldsymbol{r}_5 \boldsymbol{r}_6 | w | \boldsymbol{r}_1' \boldsymbol{r}_2' \rangle .
\end{aligned} \tag{56}$$

Nun wird $\tilde{g}^{\gtrless}(\boldsymbol{r}' t', \boldsymbol{r} t)$ nur in der Nähe von $t' = 0$ wesentlich von Null verschieden sein und schwach von t abhängen (vgl. [1]). Das gleiche Verhalten nehmen wir bei allen Funktionen an, die rechts in (56) vorkommen: Langsame Änderung mit der Schwerpunktszeit und bezüglich der Relativzeit Lokalisierung um Null. Es ist dann sinnvoll, auf der rechten Seite von (56) überall um t als Schwerpunktszeit zu entwickeln. Wir werten zuerst den Nullten Term dieser „langwelligen Näherung" aus:

$$\begin{aligned}
i \langle \boldsymbol{r}_1 \boldsymbol{r}_2 | \tilde{T}^{\gtrless}(t, t') | \boldsymbol{r}_1' \boldsymbol{r}_2' \rangle
&= \frac{1}{\hbar} \int \mathrm{d}\boldsymbol{r}_3 \ldots \mathrm{d}\boldsymbol{r}_6 \Big\{ \langle \boldsymbol{r}_1 \boldsymbol{r}_2 | w | \boldsymbol{r}_3 \boldsymbol{r}_4 \rangle \tilde{g}^{\gtrless}\left(\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_5, t'; \frac{\boldsymbol{r}_3 + \boldsymbol{r}_5}{2}, t\right) \tilde{g}^{\gtrless}\left(\boldsymbol{r}_4 - \boldsymbol{r}_6, t'; \frac{\boldsymbol{r}_4 + \boldsymbol{r}_6}{2}, t\right) \\
&+ \int_{-\infty}^{0} \mathrm{d}\tau \langle \boldsymbol{r}_1 \boldsymbol{r}_2 | [\tilde{T}^{>} - \tilde{T}^{<}](t_1 - \tau) | \boldsymbol{r}_3 \boldsymbol{r}_4 \rangle \tilde{g}^{\gtrless}\left(\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_5, t' + \tau; \frac{\boldsymbol{r}_3 + \boldsymbol{r}_5}{2}, t\right) \\
&\qquad \cdot \tilde{g}^{\gtrless}\left(\boldsymbol{r}_4 - \boldsymbol{r}_6, t' + \tau; \frac{\boldsymbol{r}_4 + \boldsymbol{r}_6}{2}, t\right) \Big\} \langle \boldsymbol{r}_5 \boldsymbol{r}_6 | w | \boldsymbol{r}_1' \boldsymbol{r}_2' \rangle
\end{aligned} \tag{57}$$

$$-\frac{1}{\hbar}\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}_3 \ldots \mathrm{d}\boldsymbol{r}_6 \int\limits_{-\infty}^{0} \mathrm{d}\tau \langle \boldsymbol{r}_1 \boldsymbol{r}_2 | \tilde{T}^{\gtrless}(t, t'-\tau) | \boldsymbol{r}_3 \boldsymbol{r}_4 \rangle \Big[\tilde{g}^{>}\Big(\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_5, \tau; \frac{\boldsymbol{r}_3+\boldsymbol{r}_5}{2}, t\Big) \tilde{g}^{>}\Big(\boldsymbol{r}_4 - \boldsymbol{r}_6, \tau; \frac{\boldsymbol{r}_4+\boldsymbol{r}_6}{2}, t\Big)$$
$$-\tilde{g}^{<}\Big(\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_5, \tau; \frac{\boldsymbol{r}_3+\boldsymbol{r}_5}{2}, t\Big) \tilde{g}^{<}\Big(\boldsymbol{r}_4 - \boldsymbol{r}_6, \tau; \frac{\boldsymbol{r}_4+\boldsymbol{r}_6}{2}, t\Big)\Big] \langle \boldsymbol{r}_5 \boldsymbol{r}_6 | w | \boldsymbol{r}_1' \boldsymbol{r}_2' \rangle .$$

Hiermit wird nun $T^{\gtrless}(t, E)$ berechnet, und zwar unter Anwendung der bekannten Distributionsidentität

$$\int\limits_0^\infty \mathrm{d}x\, e^{\mp ixk} = \mp i/(k \mp i\,O) .$$

Das Ergebnis nimmt eine verhältnismäßig einfache Gestalt an, wenn man folgende Bezeichnungen einführt, die auch später immer wieder gebraucht werden:

$$\langle \boldsymbol{r}_1 \boldsymbol{r}_2 | \mathscr{T}(t, z) | \boldsymbol{r}_1' \boldsymbol{r}_2' \rangle =: \langle \boldsymbol{r}_1 \boldsymbol{r}_2 | w | \boldsymbol{r}_1' \boldsymbol{r}_2' \rangle + \frac{1}{2\pi} \int \frac{\mathrm{d}E}{z-E} \langle \boldsymbol{r}_1 \boldsymbol{r}_2 | [T^{>} - T^{<}](t, E) | \boldsymbol{r}_1' \boldsymbol{r}_2' \rangle , \tag{58}$$

$$\langle \boldsymbol{r}_1 \boldsymbol{r}_2 | \mathscr{G}^{\gtrless}(t, E) | \boldsymbol{r}_1' \boldsymbol{r}_2' \rangle =: 2\pi \int \mathrm{d}E'\, \mathrm{d}E''\, \delta(E' + E'' - E) \tag{59}$$
$$\cdot \int \mathrm{d}\tau'\, e^{(i/\hbar)E'\tau'} \tilde{g}^{\gtrless}\Big(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_1', \tau'; \frac{\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_1'}{2}, t\Big) \int \mathrm{d}\tau''\, e^{(i/\hbar)E''\tau''} \tilde{g}^{\gtrless}\Big(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_2', \tau''; \frac{\boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_2'}{2}, t\Big),$$

$$\langle \boldsymbol{r}_1 \boldsymbol{r}_2 | \mathscr{G}(t, z) | \boldsymbol{r}_1' \boldsymbol{r}_2' \rangle =: \frac{1}{2\pi} \int \frac{\mathrm{d}E}{z-E} \langle \boldsymbol{r}_1 \boldsymbol{r}_2 | [\mathscr{G}^{>} - \mathscr{G}^{<}](t, E) | \boldsymbol{r}_1' \boldsymbol{r}_2' \rangle . \tag{60}$$

Wir erhalten dann

$$\langle \boldsymbol{r}_1 \boldsymbol{r}_2 | T^{\gtrless}(t, E) | \boldsymbol{r}_1' \boldsymbol{r}_2' \rangle = \int \mathrm{d}\boldsymbol{r}_3 \ldots \mathrm{d}\boldsymbol{r}_6 \langle \boldsymbol{r}_1 \boldsymbol{r}_2 | \mathscr{T}(t, E + i\,O) | \boldsymbol{r}_3 \boldsymbol{r}_4 \rangle \langle \boldsymbol{r}_3 \boldsymbol{r}_4 | \mathscr{G}^{\gtrless}(t, E) | \boldsymbol{r}_5 \boldsymbol{r}_6 \rangle \langle \boldsymbol{r}_5 \boldsymbol{r}_6 | w | \boldsymbol{r}_1' \boldsymbol{r}_2' \rangle$$
$$+ \int \mathrm{d}\boldsymbol{r}_3 \ldots \mathrm{d}\boldsymbol{r}_6 \langle \boldsymbol{r}_1 \boldsymbol{r}_2 | T^{\gtrless}(t, E) | \boldsymbol{r}_3 \boldsymbol{r}_4 \rangle \langle \boldsymbol{r}_3 \boldsymbol{r}_4 | \mathscr{G}(t, E - i\,O) | \boldsymbol{r}_5 \boldsymbol{r}_6 \rangle \langle \boldsymbol{r}_5 \boldsymbol{r}_6 | w | \boldsymbol{r}_1' \boldsymbol{r}_2' \rangle \tag{61}$$

und haben damit eine Integralgleichung, die wir formal lösen können. In Operatorschreibweise folgt durch Iteration:

$$T^{\gtrless}(t, E) = \mathscr{T}(t, E + i\,O)\, \mathscr{G}^{\gtrless}(t, E) \{w + w \mathscr{G}(t, E - i\,O) w + w \mathscr{G}(t, E - i\,O) w \mathscr{G}(t, E - i\,O) w + \cdots\} . \tag{62}$$

Die Reihe in der geschweiften Klammer löst für $z = E - i\,O$ offensichtlich die Gleichung

$$\mathscr{T}(t, z) = w + \mathscr{T}(t, z)\, \mathscr{G}(t, z)\, w , \tag{63}$$

die für $\mathscr{T}(t, z)$ gilt, wie wir jetzt zeigen wollen: Einsetzen von (61) in die Definitionsgleichung (58) für $\mathscr{T}(t, z)$ ergibt

$$\mathscr{T}(t, z) = w + \frac{1}{2\pi} \int \frac{\mathrm{d}E}{z-E} \mathscr{T}(t, E + i\,O) [\mathscr{G}^{>} - \mathscr{G}^{<}](t, E) \cdot w$$
$$+ \frac{1}{2\pi} \int \frac{\mathrm{d}E'}{z-E'} [T^{>} - T^{<}](t, E')\, \mathscr{G}(t, E' - i\,O) \cdot w$$
$$= w + \frac{1}{2\pi} \int \mathrm{d}E \frac{1}{2\pi} \int \mathrm{d}E' [T^{>} - T^{<}](t, E') [\mathscr{G}^{>} - \mathscr{G}^{<}](t, E) \cdot w$$
$$\cdot \left\{\frac{1}{(z-E)(E-E'+i\,O)} + \frac{1}{(z-E')(E'-E-i\,O)}\right\}.$$

Wegen

$$\{\cdots\} = \frac{1}{(z-E)(z-E')} \cdot \frac{E-E'}{E-E'+i\,O} = \frac{1}{z-E}\Big| \cdot \frac{1}{|z-E'}$$

steht gerade (63) da, wenn wir wiederum (58) und (60) beachten. (62) und (63) liefern also die als „optische Theoreme" bezeichneten Gleichungen

$$T^{>}(t, E) = \mathscr{T}(t, E + i\,O)\, \mathscr{G}^{>}(t, E)\, \mathscr{T}(t, E - i\,O) \tag{64}$$

und

$$T^{<}(t, E) = \mathscr{T}(t, E + i\,O)\, \mathscr{G}^{<}(t, E)\, \mathscr{T}(t, E - i\,O) . \tag{65}$$

Es sei noch einmal betont, daß (63), (64), (65) nur in der Näherung gilt, die dem Übergang von (56) zu (57) entspricht. Speziell im Gleichgewicht sind die Gln. (63) bis (65) sogar exakt. Für den Fall des Nicht-gleichgewichts dürfen wir (63) und (64) in niedrigster, d.h. Nullter Ordnung bezüglich $g^<$ noch als richtig ansehen. Zu (65) berechnen wir jetzt noch die erste langwellige Korrektur $T^<(t, E)_{\mathrm{II}}$, und zwar setzen wir

$$T^<(t, E) = \mathscr{T}(t, E + iO)\,\mathscr{G}^<(t, E)\,\mathscr{T}(t, E - iO) + T^<(t, E)|_{\mathrm{II}} \equiv T^<(t, E)|_{\mathrm{I}} + T^<(t, E)|_{\mathrm{II}}. \qquad (66)$$

Wir beginnen mit (56), wo wir auf der rechten Seite überall um die Schwerpunktszeit t entwickeln, aber nur solche Terme berücksichtigen, die in der ersten Ableitung $\partial_t \ldots$ linear sind. Zur Vereinfachung wollen wir außerdem $T^<_{\mathrm{II}}$ exakt nur in niedrigster, d.h. zweiter Ordnung bezüglich $g^<$ angeben. (In dieser Näherung werden wir (66) später brauchen.) Für den zusätzlichen Korrekturterm zu $\tilde{T}^<$ nach (57) können wir dann schreiben:

$$\begin{aligned} i\langle \boldsymbol{r}_1 \boldsymbol{r}_2 | \tilde{T}^<(t, t') | \boldsymbol{r}_1' \boldsymbol{r}_2' \rangle [\text{Korrektur}] &= (1/\hbar) \int \mathrm{d}\boldsymbol{r}_3 \ldots \mathrm{d}\boldsymbol{r}_6 \int_{-\infty}^{0} \mathrm{d}\tau \langle \boldsymbol{r}_1 \boldsymbol{r}_2 | [\tilde{T}^> - \tilde{T}^<](t, -\tau) | \boldsymbol{r}_3 \boldsymbol{r}_4 \rangle \qquad (67) \\ &\cdot \frac{\tau}{2}\, \partial_t \left[\tilde{g}^<\left(\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_5, t' + \tau; \frac{\boldsymbol{r}_3 + \boldsymbol{r}_5}{2}, t \right) \tilde{g}^<\left(\boldsymbol{r}_4 - \boldsymbol{r}_6, t' + \tau; \frac{\boldsymbol{r}_4 + \boldsymbol{r}_6}{2}, t \right) \right] \langle \boldsymbol{r}_5 \boldsymbol{r}_6 | w | \boldsymbol{r}_1' \boldsymbol{r}_2' \rangle \\ &- \frac{1}{\hbar} \int \mathrm{d}\boldsymbol{r}_3 \ldots \mathrm{d}\boldsymbol{r}_6 \int_{-\infty}^{0} \mathrm{d}\tau \, \frac{\tau}{2} \langle \boldsymbol{r}_1 \boldsymbol{r}_2 | \partial_t \tilde{T}^<(t, t' - \tau) | \boldsymbol{r}_3 \boldsymbol{r}_4 \rangle \\ &\cdot \left[\tilde{g}^<\left(\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_5, \tau; \frac{\boldsymbol{r}_3 + \boldsymbol{r}_5}{2}, t \right) \tilde{g}^>\left(\boldsymbol{r}_4 - \boldsymbol{r}_6, \tau; \frac{\boldsymbol{r}_4 + \boldsymbol{r}_6}{2}, t \right) \right. \\ &\left. - \tilde{g}^<\left(\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_5, \tau; \frac{\boldsymbol{r}_3 + \boldsymbol{r}_5}{2}, t \right) \tilde{g}^<\left(\boldsymbol{r}_4 - \boldsymbol{r}_6, \tau; \frac{\boldsymbol{r}_4 + \boldsymbol{r}_6}{2}, t \right) \right] \langle \boldsymbol{r}_5 \boldsymbol{r}_6 | w | \boldsymbol{r}_1' \boldsymbol{r}_2' \rangle. \end{aligned}$$

Durch Fourier-Transformation führen wir jetzt wieder die Energievariable E ein und erhalten in Operatorschreibweise

$$T^<(t, E)[\text{Korrektur}] = \tfrac{1}{2} i\hbar\, \partial_E \mathscr{T}(t, E + iO)\, \partial_t \mathscr{G}^<(t, E)\, w - \tfrac{1}{2} i\hbar\, \partial_t T^<(t, E)\, \partial_E \mathscr{G}(t, E - iO)\, w. \qquad (68)$$

Dies kommt also jetzt zur rechten Seite von (61) hinzu:

$$\begin{aligned} T^<(t, E) = \mathscr{T}(t, E + iO)\,\mathscr{G}^<(t, E)\, w + \tfrac{1}{2} i\hbar\, \partial_E \mathscr{T}(t, E + iO)\, \partial_t \mathscr{G}^<(t, E)\, w \\ + T^<(t, E)\, \mathscr{G}(t, E - iO)\, w - \tfrac{1}{2} i\hbar\, \partial_t T^<(t, E)\, \partial_E \mathscr{G}(t, E - iO)\, w. \qquad (69) \end{aligned}$$

Bei Vernachlässigung des letzten Terms ergibt die Iteration dieser Gleichung für $T^<(t, E)$:

$$\begin{aligned} &\mathscr{T}(t, E + iO)\,\mathscr{G}^<(t, E)\,\{w + w\mathscr{G}(t, E - iO)\, w + \cdots\} \\ &\quad + \tfrac{1}{2} i\hbar\, \partial_E \mathscr{T}(t, E + iO)\, \partial_t \mathscr{G}^<(t, E)\, \{w + w\mathscr{G}(t, E - iO w + \cdots\}. \end{aligned}$$

Wenn wir berücksichtigen, daß $\partial_t \mathscr{T}$ sowie $\partial_t \mathscr{G}$ von mindestens erster Ordnung in $g^<$ ist, bleiben wir in erster Ordnung in der Ableitung $\partial_t \ldots$ und in zweiter Ordnung bezüglich $g^<$ richtig, wenn wir die zusätzlich bei der Iteration entstehenden Terme mit

$$-\tfrac{1}{2} i\hbar\, \mathscr{T}(t, E + iO)\, \partial_t \mathscr{G}^<(t, E)\, \partial_E \{w\mathscr{G}(t, E - iO)\, w + w\mathscr{G}(t, E - iO)\, w\mathscr{G}(t, E - iO)\, w + \cdots\}$$

angeben. Zusammen mit (63), (66) folgt dann

$$T^<(t, E)_{\mathrm{II}} = \tfrac{1}{2} i\hbar\, \{(\partial_E \mathscr{T}(t, E + iO)\, \partial_t \mathscr{G}^<(t, E))\, \mathscr{T}(t, E - iO) - \mathscr{T}(t, E + iO)\, \partial_t \mathscr{G}^<(t, E)\, \partial_E \mathscr{T}(t, E - iO)\}. \qquad (70)$$

Die verschiedenen Vielteilchengrößen in diesem Abschnitt haben wir bisher nur in Ortsdarstellung betrachtet. Der Übergang zur Impulsdarstellung wird in der üblichen Weise vorgenommen. Beispiel:

$$\langle \boldsymbol{p}_1 \boldsymbol{p}_2 | \mathscr{G}(t, z) | \boldsymbol{p}_1' \boldsymbol{p}_2' \rangle = \int \mathrm{d}\boldsymbol{r}_1 \mathrm{d}\boldsymbol{r}_2 \mathrm{d}\boldsymbol{r}_1' \mathrm{d}\boldsymbol{r}_2' \langle \boldsymbol{p}_1 \boldsymbol{p}_2 | \boldsymbol{r}_1 \boldsymbol{r}_2 \rangle \langle \boldsymbol{r}_1 \boldsymbol{r}_2 | \mathscr{G}(t, z) | \boldsymbol{r}_1' \boldsymbol{r}_2' \rangle \langle \boldsymbol{r}_1' \boldsymbol{r}_2' | \boldsymbol{p}_1' \boldsymbol{p}_2' \rangle,$$

wobei

$$\langle \boldsymbol{p}_1 \boldsymbol{p}_2 | \boldsymbol{r}_1 \boldsymbol{r}_2 \rangle = \langle \boldsymbol{r}_1 \boldsymbol{r}_2 | \boldsymbol{p}_1 \boldsymbol{p}_2 \rangle^* = (2\pi\hbar)^{-3} \exp\{-(i/\hbar)(\boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{p}_2 \cdot \boldsymbol{r}_2)\}.$$

Demnach folgt mit (59), (60):

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{p}_1 \boldsymbol{p}_2 | \mathscr{G}(t, z) | \boldsymbol{p}_1' \boldsymbol{p}_2' \rangle &= \int \frac{\mathrm{d}E' \mathrm{d}E''}{z - E' - E''} \int \mathrm{d}\boldsymbol{x}\, \mathrm{d}\boldsymbol{y} \exp\{-(i/\hbar)[\boldsymbol{x} \cdot (\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_1') + \boldsymbol{y} \cdot (\boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_2')]\} \qquad (71) \\ &\cdot \left\{ g^>\left(\frac{\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_1'}{2}, E'; \boldsymbol{x}, t \right) g^>\left(\frac{\boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{p}_2'}{2}, E''; \boldsymbol{y}, t \right) - g^<\left(\frac{\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_1'}{2}, E'; \boldsymbol{x}, t \right) g^<\left(\frac{\boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{p}_2'}{2}, E''; \boldsymbol{y}, t \right) \right\}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe von (21) und (29) können wir nun $\langle|\mathscr{G}(t,z)|\rangle$ nach $g^{<}$ entwickeln. In Nullter Ordnung erhalten wir

$$\langle \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2\,|\,\mathscr{G}_0(t,z)\,|\,\boldsymbol{p}_1'\boldsymbol{p}_2'\rangle = \delta(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_1')\,\delta(\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_2')\left[z-\frac{p_1{}^2}{2m}-\frac{p_2{}^2}{2m}\right]^{-1} \tag{72}$$

und in erster Ordnung

$$\begin{aligned}
&\langle \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2\,|\,\mathscr{G}_1(t,z)\,|\,\boldsymbol{p}_1'\boldsymbol{p}_2'\rangle \qquad\qquad (73)\\
&= \delta(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_1')\int \mathrm{d}E\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\frac{\exp[-(i/\hbar)\,\boldsymbol{x}\cdot(\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_2')]}{z-E-p_1{}^2/2m}\left\{(2\pi\hbar)^{-3}\,a_1\left(\frac{\boldsymbol{p}_2+\boldsymbol{p}_2'}{2},E;\boldsymbol{x},t\right)\pm g^{<}\left(\frac{\boldsymbol{p}_2+\boldsymbol{p}_2'}{2},E;\boldsymbol{x};t\right)\right\}\\
&+\delta(\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_2)\int \mathrm{d}E\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\frac{\exp[-(i/\hbar)\,\boldsymbol{x}\cdot(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_1')]}{z-E-p_2{}^2/2m}\left\{(2\pi\hbar)^{-3}\,a_1\left(\frac{\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_1'}{2},E;\boldsymbol{x};t\right)\pm g^{<}\left(\frac{\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_1'}{2},E;\boldsymbol{x},t\right)\right\}
\end{aligned}$$

mit

$$a_1(\boldsymbol{k}E,\boldsymbol{x}t) = -\delta'\left(E-\frac{k^2}{2m}\right)\left(\varepsilon^{\mathrm{Born}}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x};t)+2\pi\hbar\,\mathrm{Re}\,\sigma_1(\boldsymbol{k}E,\boldsymbol{x},t)\right)-\frac{1}{2\pi}\,\frac{\mathscr{P}'}{E-k^2/2m}\cdot 2\pi\hbar\,\gamma_1(\boldsymbol{k}E,\boldsymbol{x}t)\,. \tag{74}$$

Die Dichteentwicklung für $\mathscr{G}(t,z)$ wird bei der entsprechenden Entwicklung für $\mathscr{T}(t,z)$ gebraucht (s. (63)). Bei $g^{<}=0$ bekommen wir mit (63) und (72) die Integralgleichung

$$\begin{aligned}
&\langle \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2\,|\mathscr{T}_0(t,z)|\,\boldsymbol{p}_1'\boldsymbol{p}_2'\rangle = \langle \boldsymbol{p}\,|\,w\,|\,\boldsymbol{p}'\rangle\,\delta(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}') \qquad\qquad (75)\\
&\quad+\int \mathrm{d}\boldsymbol{q}\,\langle \tfrac{1}{2}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{p},\tfrac{1}{2}\boldsymbol{P}-\boldsymbol{p}\,|\mathscr{T}_0(t,z)|\,\tfrac{1}{2}\boldsymbol{P}'+\boldsymbol{q},\tfrac{1}{2}\boldsymbol{P}'-\boldsymbol{q}\rangle\left[z-\frac{1}{4m}\boldsymbol{P}'^2-E_q\right]^{-1}\langle \boldsymbol{q}\,|\,w\,|\,\boldsymbol{p}'\rangle.
\end{aligned}$$

($\boldsymbol{p}$ bzw. $\boldsymbol{p}'$ ist der zu $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2$ bzw. $\boldsymbol{p}_1',\boldsymbol{p}_2'$ gehörende Relativimpuls und mit $\boldsymbol{P},\boldsymbol{P}'$ werden die entsprechenden Schwerpunktsimpulse bezeichnet.) Die Lösung können wir leicht angeben, wenn wir uns an die Integralgleichung für die Zweiteilchen-T-Matrix erinnern. Es gilt

$$\langle \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2\,|\mathscr{T}_0(t,z)|\,\boldsymbol{p}_1'\boldsymbol{p}_2'\rangle = \delta(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}')\,\langle \boldsymbol{p}\,|\,T\left(z-\frac{1}{4m}P^2\right)|\,\boldsymbol{p}'\rangle\,. \tag{76}$$

$T(z)$ ist hier also der Zweiteilchen-T-Operator im Raum der Relativkoordinaten zweier Teilchen. Im Gleichgewicht kann man übrigens die δ-Funktion der Schwerpunktsimpulse nicht nur bei $\mathscr{T}_0$, sondern auch beim vollen $\mathscr{T}(t,z)$ abspalten.

Zu $\mathscr{T}_0$ nach (76) folgt als erste Dichtekorrektur $\sim g^{<}$:

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2\,|\mathscr{T}_1(t,z)|\,\boldsymbol{p}_1'\boldsymbol{p}_2'\rangle = \int \mathrm{d}\boldsymbol{q}_1\,\mathrm{d}\boldsymbol{q}_2\,\mathrm{d}\boldsymbol{q}_1'\,\mathrm{d}\boldsymbol{q}_2'\,\{&\langle \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2\,|\mathscr{T}_0(z)|\,\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2\rangle\langle \boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2\,|\,\mathscr{G}_1(t,z)\,|\,\boldsymbol{q}_1'\boldsymbol{q}_2'\rangle \qquad (77)\\
&+\langle \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2\,|\mathscr{T}_1(t,z)|\,\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2\rangle\langle \boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2\,|\mathscr{G}_0(z)|\,\boldsymbol{q}_1'\boldsymbol{q}_2'\rangle\}\,\langle \boldsymbol{q}_1'\boldsymbol{q}_2'\,|\,w\,|\,\boldsymbol{p}_1'\boldsymbol{p}_2'\rangle,
\end{aligned}$$

d.h. bei bekannter Zweiteilchen-T-Matrix ist $\langle|\mathscr{T}_1(t,z)|\rangle$ als Lösung dieser Gleichung bestimmt.

Ganz analog sind auch die höheren Dichtekorrekturen $\mathscr{T}_n(t,z)$ zu behandeln und man erhält so eine Hierarchie von Integralgleichungen.

Nun wenden wir uns den Größen $T^{\gtrless}$ zu. In Impulsdarstellung lautet Gl. (64):

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2\,|\,T^{>}(t,E)\,|\,\boldsymbol{p}_1'\boldsymbol{p}_2'\rangle = 2\pi\int \mathrm{d}\boldsymbol{q}_1\ldots\mathrm{d}\boldsymbol{q}_2'\,&\langle \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2\,|\mathscr{T}(t,E+iO)|\,\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2\rangle \qquad (78)\\
&\cdot\int \mathrm{d}E'\,\mathrm{d}E''\,\delta(E'+E''-E)\int \mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\,\exp\{-(i/\hbar)\,[\boldsymbol{x}\cdot(\boldsymbol{q}_1-\boldsymbol{q}_1')+\boldsymbol{y}\cdot(\boldsymbol{q}_2-\boldsymbol{q}_2')]\}\\
&\cdot g^{>}\left(\frac{\boldsymbol{q}_1+\boldsymbol{q}_1'}{2},E';\boldsymbol{x},t\right)g^{>}\left(\frac{\boldsymbol{q}_2+\boldsymbol{q}_2'}{2},E'';\boldsymbol{y},t\right)\langle \boldsymbol{q}_1'\boldsymbol{q}_2'\,|\mathscr{T}(t,E-iO)|\,\boldsymbol{p}_1'\boldsymbol{p}_2'\rangle\,,
\end{aligned}$$

so daß

$$\begin{aligned}
&\langle \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2\,|\,T_0^{>}(E)\,|\,\boldsymbol{p}_1'\boldsymbol{p}_2'\rangle \equiv \langle \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2\,|\,T^{>}(t,E)\,|\,\boldsymbol{p}_1'\boldsymbol{p}_2'\rangle|_{g^{<}\equiv 0} \qquad\qquad (79)\\
&\quad= 2\pi\,\delta(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}')\int \mathrm{d}\boldsymbol{q}\,\delta\left(E-\frac{1}{4m}P^2-E_q\right)\langle \boldsymbol{p}\,|\,T(E_q+iO)\,|\,\boldsymbol{q}\rangle\langle \boldsymbol{q}\,|\,T(E_q-iO)\,|\,\boldsymbol{p}'\rangle.
\end{aligned}$$

Entsprechend folgt für den ersten Anteil von $T^{<}$:

$$\begin{aligned}
&\langle \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2\,|\,T^{<}(t,E)\,|\,\boldsymbol{p}_1'\boldsymbol{p}_2'\rangle_{\mathrm{I}} \qquad\qquad (80)\\
&= 2\pi\int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\varkappa}\int \mathrm{d}E'\,\mathrm{d}E''\,\delta(E'+E''-E)\left\langle \boldsymbol{p}\,|\,T\left(E-\frac{P^2}{4m}+iO\right)|\,\boldsymbol{k}+\frac{\boldsymbol{\varkappa}}{2}\right\rangle\left\langle \boldsymbol{k}-\frac{\boldsymbol{\varkappa}}{2}\,|\,T\left(E-\frac{P'^2}{4m}-iO\right)|\,\boldsymbol{p}'\right\rangle\\
&\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}\,\exp\{-i/\hbar[\boldsymbol{x}\cdot(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}')+\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\varkappa}]\}\,g^{<}(\tfrac{1}{4}(\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}')+\boldsymbol{k},E';\boldsymbol{x}+\tfrac{1}{2}\boldsymbol{\xi},t)\,g^{<}(\tfrac{1}{4}(\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}')-\boldsymbol{k},E'';\boldsymbol{x}-\tfrac{1}{2}\boldsymbol{\xi},t).
\end{aligned}$$

Wie in Abschnitt 3, nämlich mit Hilfe des Mittelwertsatzes bzw. mit (34) sehen wir, daß wir — bis auf Terme von höherer als zweiter Ordnung in f — auch schreiben können:

$$\langle \boldsymbol{p}_1 \boldsymbol{p}_2 | T^{<}(t, E) | \boldsymbol{p}_1' \boldsymbol{p}_1' \rangle_{\mathrm{I}} \tag{81}$$
$$= 2\pi \int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\, \mathrm{d}\boldsymbol{\varkappa}\, \delta\Big(E_k + \frac{1}{m}\Big[\frac{\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}'}{4}\Big]^2 - E\Big) \Big\langle \boldsymbol{p} \Big| T\Big(E - \frac{P^2}{4m} + iO\Big) \Big| \boldsymbol{k} + \frac{\boldsymbol{\varkappa}}{2} \Big\rangle \Big\langle \boldsymbol{k} - \frac{\boldsymbol{\varkappa}}{2} \Big| T\Big(E - \frac{P'^2}{4m} - iO\Big) \Big| \boldsymbol{p}' \Big\rangle$$
$$\cdot \int \mathrm{d}\boldsymbol{x}\, \mathrm{d}\boldsymbol{\xi} \exp\{-i/\hbar [\boldsymbol{x} \cdot (\boldsymbol{P} - \boldsymbol{P}') + \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\varkappa}]\} f(\tfrac{1}{4}(\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}') + \boldsymbol{k}, \boldsymbol{x} + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\xi}; t) f(\tfrac{1}{4}(\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}') - \boldsymbol{k}, \boldsymbol{x} - \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\xi}; t).$$

Analog ergibt sich

$$\langle \boldsymbol{p}_1 \boldsymbol{p}_2 | T^{<}(t, E) | \boldsymbol{p}_1' \boldsymbol{p}_2' \rangle_{\mathrm{II}} = i\hbar\pi \int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\, \mathrm{d}\boldsymbol{\varkappa}\, \delta\Big(E_k + \frac{1}{m}\Big[\frac{\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}'}{4}\Big]^2 - E\Big) \tag{82}$$
$$\cdot \int \mathrm{d}\boldsymbol{x}\, \mathrm{d}\boldsymbol{\xi} \exp\{-i/\hbar [\boldsymbol{x} \cdot (\boldsymbol{P} - \boldsymbol{P}') + \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\varkappa}]\}\, \partial_t [f(\tfrac{1}{4}(\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}') + \boldsymbol{k}, \boldsymbol{x} + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\xi}; t) f(\tfrac{1}{4}(\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}') - \boldsymbol{k}, \boldsymbol{x} - \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\xi}; t)]$$
$$\cdot \Big\{ \Big\langle \boldsymbol{p} \Big| T'\Big(E - \frac{P^2}{4m} + iO\Big) \Big| \boldsymbol{k} + \frac{\boldsymbol{\varkappa}}{2} \Big\rangle \Big\langle \boldsymbol{k} - \frac{\boldsymbol{\varkappa}}{2} \Big| T\Big(E - \frac{P'^2}{4m} - iO\Big) \Big| \boldsymbol{p}' \Big\rangle$$
$$- \Big\langle \boldsymbol{p} \Big| T\Big(E - \frac{P^2}{4m} + iO\Big) \Big| \boldsymbol{k} + \frac{\boldsymbol{\varkappa}}{2} \Big\rangle \Big\langle \boldsymbol{k} - \frac{\boldsymbol{\varkappa}}{2} \Big| T'\Big(E - \frac{P'^2}{4m} - iO\Big) \Big| \boldsymbol{p}' \Big\rangle \Big\}.$$

5. Die $\mathcal{T}$-Matrix-Näherung des Massenoperators

Aus der Definition (44) des Massenoperators und der $\mathcal{T}$-Näherung für G_2 [Gl. (49) bzw. (50)] folgt

$$\Sigma(11') = i\{\langle 12|\mathcal{T}|31'\rangle \pm \langle 12|\mathcal{T}|1'3\rangle\} G(32) \tag{83}$$

und daraus

$$\sigma^{\gtrless}(\boldsymbol{p}E, \boldsymbol{r}t) = \int \frac{\mathrm{d}E'}{2\pi\hbar} \int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{(2\pi\hbar)^3} \int \mathrm{d}\boldsymbol{q}\, \mathrm{d}\boldsymbol{q}' \exp\{(i/\hbar)[\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{q} + \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{q}']\} \int \mathrm{d}\boldsymbol{p}'\, g^{\lessgtr}(\boldsymbol{p}'E', \boldsymbol{x}t) \tag{84}$$
$$\cdot \{\langle \boldsymbol{p} + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}' + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{q}' | T^{\gtrless}(t, E + E') | \boldsymbol{p} - \tfrac{1}{2}\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}' - \tfrac{1}{2}\boldsymbol{q}' \rangle$$
$$\pm \langle \boldsymbol{p} + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}' + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{q}' | T^{\gtrless}(t, E + E') | \boldsymbol{p}' - \tfrac{1}{2}\boldsymbol{q}', \boldsymbol{p} - \tfrac{1}{2}\boldsymbol{q} \rangle\}.$$

Um nun $\gamma(\boldsymbol{p}E, \boldsymbol{r}t)$ und $\mathrm{Re}\,\sigma(\boldsymbol{p}E, \boldsymbol{r}t)$ in niedrigster, d.h. erster Ordnung bezüglich f zu gewinnen, brauchen wir nur $\sigma^{>}$ entsprechend zu entwickeln. Mit (79) und (34):

$$\sigma_1^{>}(\boldsymbol{p}E, \boldsymbol{r}t) = \frac{\pi}{2\pi\hbar} \int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{(2\pi\hbar)^3} \int \mathrm{d}\boldsymbol{p}'\, \mathrm{d}\boldsymbol{q}\, \mathrm{d}\boldsymbol{k} \exp(-(i/\hbar)\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{x}) f(\boldsymbol{p}', \boldsymbol{r} + \boldsymbol{x}; t) \tag{85}$$
$$\cdot\, \delta\Big(E + \frac{p'^2}{2m} - \frac{1}{4m}[\boldsymbol{p} + \boldsymbol{p}']^2 - E_k\Big) \langle \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}' + \boldsymbol{q}) | T_{\pm}(E_k + iO) | \boldsymbol{k} \rangle \langle \boldsymbol{k} | T_{\pm}(E_k - iO) | \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}' - \boldsymbol{q}) \rangle.$$

In $\sigma_1^{>}$ können wir jetzt noch eine langwellige Näherung einführen, indem wir $f(\boldsymbol{p}', \boldsymbol{r} + \boldsymbol{x}; t)$ durch $f(\boldsymbol{p}', \boldsymbol{r}; t)$ ersetzen. Dieser langwellige Limes wird dann durch einen zusätzlichen Index „0“ gekennzeichnet:

$$\sigma_{1,0}^{>}(\boldsymbol{p}E, \boldsymbol{r}t) = \frac{\pi}{2\pi\hbar} \int \mathrm{d}\boldsymbol{p}'\, \mathrm{d}\boldsymbol{k}\, \delta\Big(E + \frac{p'^2}{2m} - \frac{1}{4m}[\boldsymbol{p} + \boldsymbol{p}']^2 - E_k\Big) \tag{86}$$
$$\cdot \Big\langle \frac{\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}'}{2} \Big| T_{\pm}(E_k + iO) \Big| \boldsymbol{k} \Big\rangle \Big\langle \boldsymbol{k} \Big| T_{\pm}(E_k - iO) \Big| \frac{\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}'}{2} \Big\rangle f(\boldsymbol{p}', \boldsymbol{r}; t).$$

Es ist klar, daß

$$\gamma_1(\boldsymbol{p}E, \boldsymbol{r}t) = (2\pi\hbar)^3 \sigma_1^{>}(\boldsymbol{p}E, \boldsymbol{r}t) \tag{87}$$

ist. Wir geben nun gemäß (24) $\mathrm{Re}\,\sigma_{1,0}(\boldsymbol{p}E, \boldsymbol{r}t)$ an und benutzen dabei noch folgende Beziehung für die Zweiteilchen-T-Matrix:

$$\mathrm{Re}\,\langle \boldsymbol{p} | T_{\pm}(x + iO) | \boldsymbol{p}' \rangle = \langle \boldsymbol{p} | w_{\pm} | \boldsymbol{p}' \rangle \tag{88}$$
$$- \tfrac{1}{2} \int \mathrm{d}\boldsymbol{p}'' \frac{\mathcal{P}}{E_{p''} - x} \langle \boldsymbol{p} | T_{\pm}(E_{p''} + iO) | \boldsymbol{p}'' \rangle \langle \boldsymbol{p}'' | T_{\pm}(E_{p''} - iO) | \boldsymbol{p}' \rangle,$$

die durch Anwendung einer allgemeinen Dispersionsrelation auf

$$F(z) = \{\langle | T_{\pm}(z) | \rangle - \langle | w_{\pm} | \rangle\}$$

aus der bekannteren Unitaritätsrelation

$$\operatorname{Im}\langle \boldsymbol{p}\,|\,T_\pm(x+i\,O)\,|\,\boldsymbol{p}'\rangle = -\frac{\pi}{2}\int \mathrm{d}\boldsymbol{p}''\,\delta(E_{p''}-x)\,\langle \boldsymbol{p}\,|\,T_\pm(x+i\,O)\,|\,\boldsymbol{p}''\rangle\langle \boldsymbol{p}''\,|\,T_\pm(x-i\,O)\,|\,\boldsymbol{p}'\rangle \tag{89}$$

abzuleiten ist. Dann haben wir

$$\begin{aligned} &2\,\pi\,\hbar\,\operatorname{Re}\sigma_{1,0}(\boldsymbol{p}\,E,\boldsymbol{r}\,t) \\ &= (2\,\pi\,\hbar)^3\int \mathrm{d}\boldsymbol{p}'\,f(\boldsymbol{p}',\boldsymbol{r};t)\left\{\operatorname{Re}\left\langle\frac{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'}{2}\right|T_\pm\left(E+\frac{p'^2}{2m}-\frac{1}{4m}[\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}']^2+i\,O\right)\left|\frac{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'}{2}\right\rangle-\left\langle\frac{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'}{2}\,\right|w_\pm\left|\,\frac{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'}{2}\right\rangle\right\}. \end{aligned} \tag{90}$$

Hieran läßt sich sofort ablesen, daß im langwelligen Limes das durch (32) definierte E_1 mit der Landau-Energie ε übereinstimmt. Die in Abschnitt 3 angekündigte Identität lautet also

$$E_{1,0}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{r};t) = \varepsilon(\boldsymbol{p},\boldsymbol{r};t)\,. \tag{91}$$

Der langwellige Limes bedeutet natürlich gar keine Näherung mehr, wenn man zum Gleichgewicht übergeht. In diesem Spezialfall hatten wir mit der Dichteentwicklung von $g^<$ begonnen. Bis jetzt fehlt uns dazu noch eine explizite Darstellung der Funktion $\alpha(p,E)$ [s. Gl. (39)]. In $\mathscr{T}$-Näherung sieht sie nun so aus:

$$\begin{aligned} \alpha(p,E) = &-\lambda^3\,\delta'\left(E-\frac{p^2}{2m}\right)\int \mathrm{d}\boldsymbol{p}'\,e^{-\beta(p'^2/2m)}\operatorname{Re}\left\langle\frac{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'}{2}\right|T_\pm\left(E+\frac{p'^2}{2m}-\frac{1}{4m}[\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}']^2+i\,O\right)\left|\frac{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'}{2}\right\rangle \\ &-\lambda^3\cdot\frac{1}{2}\,\frac{\mathscr{P}'}{E-p^2/2m}\int \mathrm{d}\boldsymbol{p}'\,e^{-\beta(p'^2/2m)}\int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\,\delta\left(E+\frac{p'^2}{2m}-\frac{1}{4m}[\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}']^2-E_k\right)\left|\left\langle\frac{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'}{2}\right|T_\pm(E_k+i\,O)\,|\,\boldsymbol{k}\rangle\right|^2. \end{aligned} \tag{92}$$

Man überzeugt sich jetzt leicht davon, daß in der Tat (42) durch die $\mathscr{T}$-Näherung verletzt wird. Nämlich (vgl. (5)):

$$\begin{aligned} &(2\,\pi\,m\,\varkappa\,T)^{-3/2}\int \mathrm{d}\boldsymbol{p}\,\mathrm{d}E\,e^{-\beta E}\,\alpha(p,E) \\ &= -2\,B_1(T) - 2^{3/2}\lambda^3\int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\,e^{-\beta E_k}\left[\frac{1}{2}\int \mathrm{d}\boldsymbol{q}\,\frac{\mathscr{P}'}{E_k-E_q}\,|\langle \boldsymbol{q}|\,T_\pm(E_k+i\,O)|\boldsymbol{k}\rangle|^2 - \operatorname{Re}\langle \boldsymbol{k}|\,T'_\pm(E_k+i\,O)|\boldsymbol{k}\rangle\right]. \end{aligned} \tag{93}$$

Hier wurde also nach Einsetzen von (92) über die Energie E integriert, und zwar im ersten Summanden partiell. Die dabei entstandene Ableitung des T-Operators wird nun mit Hilfe der Identität

$$T'(z) = -T(z)\left(\frac{1}{H_0-z}\right)^2 T(z) \tag{94}$$

umgeformt. (H_0 ist der Operator der kinetischen Energie der Relativbewegung zweier Teilchen.) Wenn wir außerdem noch

$$\frac{\mathscr{P}'}{x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,\frac{x}{x^2+\eta^2} = -\operatorname{Re}\frac{1}{(x\mp i\,\eta)^2} \qquad (\eta>0,\ \eta\to 0) \tag{95}$$

beachten, können wir für die eckige Klammer in (93)

$$[\cdots] = \tfrac{1}{2}\operatorname{Re}\int \mathrm{d}\boldsymbol{q}\,\frac{\langle \boldsymbol{k}\,|\,T_\pm(E_k+i\,O)\,|\,\boldsymbol{q}\rangle}{[E_q-(E_k+i\,O)]^2}\,(\langle \boldsymbol{q}\,|\,T_\pm(E_k+i\,O)\,|\,\boldsymbol{k}\rangle - \langle \boldsymbol{q}\,|\,T_\pm(E_k-i\,O)\,|\,\boldsymbol{k}\rangle)$$

schreiben. Hier wenden wir zunächst die Unitaritätsrelation (89) und danach nochmals (94) an:

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}\int \mathrm{d}\boldsymbol{q}\,\frac{\mathscr{P}'}{E_k-E_q}\,|\langle \boldsymbol{q}\,|\,T_\pm(E_k+i\,O)\,|\,\boldsymbol{k}\rangle|^2 - \operatorname{Re}\langle \boldsymbol{k}\,|\,T'_\pm(E_k+i\,O)\,|\,\boldsymbol{k}\rangle \\ &\qquad = \pi\int \mathrm{d}\boldsymbol{q}\,\delta(E_q-E_k)\,\operatorname{Im}[\langle \boldsymbol{k}\,|\,T_\pm(E_k+i\,O)\,|\,\boldsymbol{q}\rangle\langle \boldsymbol{k}\,|\,T'_\pm(E_k+i\,O)\,|\,\boldsymbol{q}\rangle^*]. \end{aligned} \tag{96}$$

Dies ist in (93) einzusetzen und mit (8) folgt dann

$$(2\,\pi\,m\,\varkappa\,T)^{-3/2}\int \mathrm{d}\boldsymbol{p}\,\mathrm{d}E\,e^{-\beta E}\,\alpha(p,E) = -2\,(B_1(T)+B_2(T))\,. \tag{97}$$

Statt Null erhalten wir also im wesentlichen den Wechselwirkungsanteil des zweiten Virialkoeffizienten.

6. $\mathcal{T}$-Näherung, Dichteentwicklung und langwellige Näherung der Kadanoff-Baymschen Gleichung

Zusammen mit der Gleichung für die Spektralfunktion a wird nun die Kadanoff-Baymsche Gleichung für $g^<$ so ausgewertet, wie es in der Einführung beschrieben ist. Dazu können wir gleich von der Fassung (35) ausgehen. Wir wissen bereits, daß der erste Term auf der linken Seite genau den Landauschen Strömungsterm, d.h. die linke Seite der Gl. (12) ergibt. Nun zeigen wir, daß die niedrigste langwellige Näherung des Kadanoff-Baymschen Stoßgliedes, in $\mathcal{T}$-Näherung und bis zur zweiten Ordnung in f entwickelt, mit dem Boltzmannschen Stoßintegral übereinstimmt. Also:

$$2\pi(2\pi\hbar)^3 \int dE\,(\sigma^<(\boldsymbol{p}E,\boldsymbol{r}t)\,g^>(\boldsymbol{p}E,\boldsymbol{r}t) - \sigma^>(\boldsymbol{p}E,\boldsymbol{r}t)\,g^<(\boldsymbol{p}E,\boldsymbol{r}t))|_{2,0} = J(\text{Boltzmann})\,. \tag{98}$$

Zum Beweis fangen wir mit der linken Seite an:

$$\int dE\,\sigma^>(\boldsymbol{p}E,\boldsymbol{r}t)\,g^<(\boldsymbol{p}E,\boldsymbol{r}t)|_{2,0} = \sigma^>_{1,0}(\boldsymbol{p},p^2/2m;\boldsymbol{r},t)\,f(\boldsymbol{p},\boldsymbol{r};t)$$

folgt wiederum mit Hilfe des Mittelwertsatzes bzw. mit (34). Im nächsten Ausdruck ist $\sigma^<$ von mindestens zweiter Ordnung in $g^<$. Wegen $g^> = (2\pi\hbar)^{-3}a \pm g^<$ gilt daher

$$\int dE\,\sigma^<(\boldsymbol{p}E,\boldsymbol{r}t)\,g^>(\boldsymbol{p}E,\boldsymbol{r}t)|_{2,0} = \int dE\,\sigma^<_{2,0}(\boldsymbol{p}E,\boldsymbol{r}t)\cdot(2\pi\hbar)^{-3}\,\delta(E-p^2/2m)\,.$$

Insgesamt bleibt also noch

$$2\pi\,\sigma^<_{2,0}(\boldsymbol{p},p^2/2m;\boldsymbol{r},t) - 2\pi(2\pi\hbar)^3\,\sigma^>_{1,0}(\boldsymbol{p},p^2/2m;\boldsymbol{r},t)\,f(\boldsymbol{p},\boldsymbol{r};t)$$

zu diskutieren. Dabei ist uns der zweite Term durch (86) schon genau bekannt. Um $\sigma^<_{2,0}(\boldsymbol{p}, p^2/2m; \boldsymbol{r}, t)$ explizit zu ermitteln, vereinfachen wir zunächst (84), indem wir $g^>(\boldsymbol{p}'E', \boldsymbol{x}t)$ durch $(2\pi\hbar)^{-3}\delta(E'-p'^2/2m)$ ersetzen; denn $T^<$ allein ist schon von mindestens zweiter Ordnung in $g^<$. Das damit erzielte Zwischenergebnis bleibt bis auf Terme von höherer Ordnung bezüglich f richtig, wenn wir $T^< = T^<_{\mathrm{I}} + T^<_{\mathrm{II}}$ nach (81) und (82) einsetzen. Für den langwelligen Limes $2\pi\sigma^<_{2,0}$ benötigen wir jetzt nur den zu $T^<_{\mathrm{I}}$ gehörenden Summanden

$$\begin{aligned}
2\pi\,\sigma^<_2(\boldsymbol{p}E,\boldsymbol{r}t)_{\mathrm{I}} = {} & \frac{\pi}{\hbar}(2\pi\hbar)^{-3}\int d\boldsymbol{p}'\,d\boldsymbol{q}\int d\boldsymbol{k}\,d\boldsymbol{\varkappa}\int d\boldsymbol{x}\,d\boldsymbol{\xi}\,\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{q}+\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\varkappa})\right\}\\
&\cdot\delta\Big(E+\frac{p'^2}{2m}-\frac{1}{4m}[\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}']^2-E_k\Big)\Big\langle\frac{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'}{2}+\frac{\boldsymbol{q}}{4}\Big|\,T_\pm\Big(E+\frac{p'^2}{2m}-\frac{1}{4m}\Big[\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}'+\frac{\boldsymbol{q}}{2}\Big]^2+i\,O\Big)\Big|\,k+\frac{\boldsymbol{\varkappa}}{2}\Big\rangle\\
&\cdot\Big\langle\frac{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'}{2}-\frac{\boldsymbol{q}}{4}\Big|\,T_\pm\Big(E+\frac{p'^2}{2m}-\frac{1}{4m}\Big[\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}'-\frac{\boldsymbol{q}}{2}\Big]^2+i\,O\Big)\Big|\,\boldsymbol{k}-\frac{\boldsymbol{\varkappa}}{2}\Big\rangle\\
&\cdot f\Big(\frac{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}'}{2}+\boldsymbol{k},\boldsymbol{r}+\boldsymbol{x}+\tfrac{1}{2}\boldsymbol{\xi};t\Big)\,f\Big(\frac{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}'}{2}-\boldsymbol{k},\boldsymbol{r}+\boldsymbol{x}-\tfrac{1}{2}\boldsymbol{\xi};t\Big).
\end{aligned}\tag{99}$$

Die Integrationen über $\boldsymbol{x}$ und über $\boldsymbol{\xi}$ ergeben $(2\pi\hbar)^6\,\delta(\boldsymbol{q})\,\delta(\boldsymbol{\varkappa})$, wenn wir die Ortsargumente in $f\cdot f$ gleich $\boldsymbol{r}$ setzen. So bekommen wir

$$\begin{aligned}
&2\pi\,\sigma^<_{2,0}(\boldsymbol{p}E,\boldsymbol{r}t)\\
&\quad=\frac{\pi}{\hbar}(2\pi\hbar)^3\int d\boldsymbol{p}'\,d\boldsymbol{k}\,\delta\Big(E+\frac{p'^2}{2m}-\frac{1}{4m}[\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}']^2-E_k\Big)\Big|\Big\langle\frac{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'}{2}\Big|\,T_\pm(E_k+i\,O)\,|\,\boldsymbol{k}\Big\rangle\Big|^2 f_+f_-,
\end{aligned}\tag{100}$$

wobei zur Abkürzung
$$f_\pm =: f\Big(\frac{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}'}{2}\pm\boldsymbol{k},\boldsymbol{r};\,t\Big) \tag{101}$$

definiert ist. Wenn man jetzt $2\pi(2\pi\hbar)^3\sigma^>_{1,0}(\boldsymbol{p}, p^2/2m; \boldsymbol{r}, t)\,f(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}; t)$ — so wie es durch (86) gegeben ist — von $2\pi\sigma^<_{2,0}(\boldsymbol{p}, p^2/2m; \boldsymbol{r}; t)$ abzieht, steht gerade das Boltzmannsche Stoßintegral da, so daß (98) bewiesen ist.

Damit haben wir erkannt, inwieweit die Landaugleichung (12) in der Kadanoff-Baymschen Gleichung enthalten ist. Was wir davon außerdem noch in unserer Auswertung zurückbehalten, können wir als Korrektur zur Landaugleichung auffassen. Die einzelnen Korrekturterme sollen jetzt ermittelt werden. Bleiben wir zunächst bei der Diskussion des Kadanoff-Baymschen Stoßgliedes. In (99) wird

$$(\boldsymbol{x}-\tfrac{1}{2}\boldsymbol{\xi})\cdot f_+\nabla_r f_- + (\boldsymbol{x}+\tfrac{1}{2}\boldsymbol{\xi})\cdot f_-\nabla_r f_+ \quad\text{statt}\quad f\Big(\frac{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}'}{2}+\boldsymbol{k},\boldsymbol{r}+\boldsymbol{x}+\tfrac{1}{2}\boldsymbol{\xi};t\Big)\,f\Big(\frac{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}'}{2}-\boldsymbol{k},\boldsymbol{r}+\boldsymbol{x}-\tfrac{1}{2}\boldsymbol{\xi};t\Big)$$

eingesetzt. Über $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{\xi}$ kann die Integration nun ausgeführt werden:

$$\int \mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}\,(\boldsymbol{x} \pm \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\xi})\exp\{-(i/\hbar)(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{q} + \boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\varkappa})\} = -(\hbar/i)(\nabla_q \pm \tfrac{1}{2}\nabla_x)(2\pi\hbar)^6\,\delta(\boldsymbol{q})\,\delta(\boldsymbol{\varkappa}).$$

$\nabla_{\boldsymbol{q}}$, $\nabla_{\boldsymbol{\varkappa}}$ wird durch partielle Integration auf die $T_\pm$-Matrizen geworfen und dann werden die δ-Funktionen wegintegriert. Als erster Zusatz zum langwelligen Limes von (99) mit $E = p^2/2m$ ergibt sich so:

$$2\pi\,\sigma^{<}_{2,1}\left(\boldsymbol{p},\frac{p^2}{2m};\boldsymbol{r},t\right)_{\mathrm{I}} = \pi(2\pi\hbar)^3\int \mathrm{d}\boldsymbol{p}'\,\mathrm{d}\boldsymbol{k}\,\delta(E_{(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')/2} - E_k) \tag{102}$$
$$\cdot\Big\{\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Im}\Big[\Big\langle\frac{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'}{2}\Big|T_\pm(E_{(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')/2}+iO)\Big|\boldsymbol{k}\Big\rangle^*\nabla_k\Big\langle\frac{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'}{2}\Big|T_\pm(E_{(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')/2}+iO)\Big|\boldsymbol{k}\Big\rangle\Big]\cdot[f_-\nabla_r f_+ - f_+\nabla_{\boldsymbol{r}} f_-]$$
$$+\,\mathrm{Im}\Big[\Big\langle\frac{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'}{2}\Big|T_\pm(E_k+iO)\Big|\boldsymbol{k}\Big\rangle^*\nabla_p\Big\langle\frac{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'}{2}\Big|T_\pm(E_k+iO)\Big|\boldsymbol{k}\Big\rangle\Big]\cdot\nabla_r[f_+f_-]$$
$$-\,\mathrm{Im}\Big[\Big\langle\frac{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'}{2}\Big|T_\pm(E_k+iO)\Big|\boldsymbol{k}\Big\rangle^*\Big\langle\frac{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'}{2}\Big|T'_\pm(E_k+iO)\Big|\boldsymbol{k}\Big\rangle\Big]\Big(\frac{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}'}{2m}\Big)\cdot\nabla_r[f_+f_-]\Big\}.$$

Die niedrigste langwellige Korrektur zu $2\pi\sigma^{<}_{2,0}$ erhalten wir aber erst dann vollständig, wenn wir auch $T^{<}_{\mathrm{II}}$ — wie schon oben erwähnt — berücksichtigen. Das führt zu dem Beitrag

$$2\pi\,\sigma^{<}_{2,1}\left(\boldsymbol{p},\frac{p^2}{2m};\boldsymbol{r},t\right)_{\mathrm{II}} = -\pi(2\pi\hbar)^3\int \mathrm{d}\boldsymbol{p}'\,\mathrm{d}\boldsymbol{k}\,\delta(E_{(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')/2} - E_k) \tag{103}$$
$$\cdot\,\mathrm{Im}\Big[\Big\langle\frac{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'}{2}\Big|T_\pm(E_k+iO)\Big|\boldsymbol{k}\Big\rangle^*\Big\langle\frac{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'}{2}\Big|T'_\pm(E_k+iO)\Big|\boldsymbol{k}\Big\rangle\Big]\cdot\partial_t[f_+f_-].$$

$\sigma^{>}_{1,1}$ berechnen wir, von (85) ausgehend, genauso wie wir es bei $\sigma^{<}_{2,1}|_{\mathrm{I}}$ getan haben:

$$-2\pi(2\pi\hbar)^3\,\sigma^{>}_{1,1}\left(\boldsymbol{p},\frac{p^2}{2m};\boldsymbol{r},t\right)f(\boldsymbol{p},\boldsymbol{r};t) = -2\pi(2\pi\hbar)^3\int \mathrm{d}\boldsymbol{p}'\,\mathrm{d}\boldsymbol{k}\,\delta(E_{(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')/2} - E_k)f(\boldsymbol{p},\boldsymbol{r};t)\nabla_r f(\boldsymbol{p}',\boldsymbol{r};t)$$
$$\cdot\,\mathrm{Im}\Big[\Big\langle\frac{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'}{2}\Big|T_\pm(E_k+iO)\Big|k\Big\rangle^*\nabla_p\Big\langle\frac{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'}{2}\Big|T_\pm(E_k+iO)\Big|\boldsymbol{k}\Big\rangle\Big]. \tag{104}$$

Nach der rechten Seite von (35) ist jetzt noch die linke weiter auszuwerten. Es ist unmittelbar klar [vgl. (90)], daß in unserer Näherung

$$-\Big(\partial_t + \frac{\boldsymbol{p}}{m}\cdot\nabla_{\boldsymbol{r}}\Big)[2\pi\hbar\,\partial_E\,\mathrm{Re}\,\sigma(\boldsymbol{p}E,\boldsymbol{r}t)f(\boldsymbol{p},\boldsymbol{r};t)]_{E=p^2/2m} \tag{105}$$
$$= -(2\pi\hbar)^3\Big(\partial_t + \frac{\boldsymbol{p}}{m}\cdot\nabla_r\Big)\int \mathrm{d}\boldsymbol{p}'\,\mathrm{Re}\Big\langle\frac{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'}{2}\Big|T'_\pm(E_{(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')/2}+iO)\Big|\frac{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'}{2}\Big\rangle f(\boldsymbol{p}',\boldsymbol{r};t)f(\boldsymbol{p},\boldsymbol{r};t).$$

Die übrigbleibende Poisson-Klammer ist auch leicht zu behandeln:

$$\mathrm{Re}\,g(\boldsymbol{p}E,\boldsymbol{r}t) = \frac{1}{2\pi}\,\frac{\mathscr{P}}{E - p^2/2m}$$

bis auf Terme, die mit $g^< \to 0$ verschwinden. Daher

$$2\pi\hbar\int \mathrm{d}E[\mathrm{Re}\,g(\boldsymbol{p}E,\boldsymbol{r}t);\,\sigma^<(\boldsymbol{p}E,\boldsymbol{r}t)]_{2,0}$$
$$= \frac{2\pi\hbar}{2\pi}\int \mathrm{d}E\,\Big\{\frac{\mathscr{P}'}{E-p^2/2m}\,\partial_t\,\sigma^{<}_{2,0}(\boldsymbol{p}E,\boldsymbol{r}t) - \nabla_p\frac{\mathscr{P}}{E-p^2/2m}\cdot\nabla_r\,\sigma^{<}_{2,0}(\boldsymbol{p}E,\boldsymbol{r}t)\Big\}$$
$$= \frac{2\pi\hbar}{2\pi}\Big(\frac{\boldsymbol{p}}{m}\cdot\nabla_r + \partial_t\Big)\int \mathrm{d}E\,\frac{\mathscr{P}'}{E-p^2/2m}\,\sigma^{<}_{2,0}(\boldsymbol{p}E,\boldsymbol{r}t).$$

Hier brauchen wir nur noch (100) anzuwenden und haben dann als letzten Korrekturanteil

$$2\pi\hbar\int \mathrm{d}E[\mathrm{Re}\,g(\boldsymbol{p}E,\boldsymbol{r}t);\,\sigma^<(\boldsymbol{p}E,\boldsymbol{r}t)]_{2,0} \tag{106}$$
$$= \frac{(2\pi\hbar)^3}{2}\Big(\frac{\boldsymbol{p}}{m}\cdot\nabla_r + \partial_t\Big)\int \mathrm{d}\boldsymbol{p}'\,\mathrm{d}\boldsymbol{k}\,\frac{\mathscr{P}'}{E_k - E_{(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')/2}}\Big|\Big\langle\frac{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'}{2}\Big|T_\pm(E_{\boldsymbol{k}}+iO)\Big|\boldsymbol{k}\Big\rangle\Big|^2 f_+f_-.$$

Unsere Ergebnisse fassen wir folgendermaßen in einer Bewegungsgleichung zusammen:

$$(\partial_t + \nabla_p\,\varepsilon(\boldsymbol{p},\boldsymbol{r};t)\cdot\nabla_r - \nabla_r\,\varepsilon(\boldsymbol{p},\boldsymbol{r};t)\cdot\nabla_p)f(\boldsymbol{p},\boldsymbol{r};t) - \sum_{j=1}^{4}K_j = J\,(\mathrm{Boltzmann}) \tag{107}$$

mit

$$K_1 = (2\pi\hbar)^3 \int \mathrm{d}\boldsymbol{p}' \left(\frac{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}'}{2m} \cdot \nabla_{\boldsymbol{r}} + \partial_t\right)\Big\{ f(\boldsymbol{p},\boldsymbol{r};t) f(\boldsymbol{p}',\boldsymbol{r};t) \operatorname{Re}\left\langle \frac{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'}{2} \right| T'_{\pm}(E_{(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')/2} + iO) \left| \frac{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'}{2}\right\rangle$$
$$- \int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\, f_+ f_- \left[\frac{1}{2} \frac{\mathscr{P}'}{E_k - E_{(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')/2}} \left| \left\langle \frac{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'}{2} \right| T_{\pm}(E_k + iO) \left| \boldsymbol{k}\right\rangle \right|^2 \right. \tag{108}$$
$$\left. + \pi\, \delta\, (E_k - E_{(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')/2}) \operatorname{Im}\left(\left\langle \frac{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'}{2} \right| T_{\pm}(E_k + iO) \left| \boldsymbol{k}\right\rangle^* \left\langle \frac{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'}{2} \right| T'_{\pm}(E_k + iO) \left| \boldsymbol{k}\right\rangle\right)\right]\Big\},$$

$$K_2 = (2\pi\hbar)^3 \int \mathrm{d}\boldsymbol{p}' \frac{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'}{2m} \cdot \nabla_{\boldsymbol{r}} \Big\{ f(\boldsymbol{p},\boldsymbol{r};t) f(\boldsymbol{p}',\boldsymbol{r};t) \operatorname{Re}\left\langle \frac{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'}{2} \right| T'_{\pm}(E_{(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')/2} + iO) \left| \frac{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'}{2}\right\rangle \tag{109}$$
$$- \int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\, f_+ f_- \cdot \frac{1}{2} \frac{\mathscr{P}'}{E_k - E_{(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')/2}} \left| \left\langle \frac{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'}{2} \right| T_{\pm}(E_k + iO) \left| \boldsymbol{k}\right\rangle \right|^2 \Big\},$$

$$K_3 = \frac{\pi}{2} (2\pi\hbar)^3 \int \mathrm{d}\boldsymbol{p}'\, \mathrm{d}\boldsymbol{k}\, \delta(E_k - E_{(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')/2}) \tag{110}$$
$$\cdot \operatorname{Im}\left[\left\langle \frac{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'}{2} \right| T_{\pm}(E_k + iO) \left| \boldsymbol{k}\right\rangle^* \nabla_k \left\langle \frac{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'}{2} \right| T_{\pm}(E_{(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')/2} + iO) \left| \boldsymbol{k}\right\rangle\right] \cdot [f_- \nabla_{\boldsymbol{r}} f_+ - f_+ \nabla_{\boldsymbol{r}} f_-],$$

$$K_4 = \pi (2\pi\hbar)^3 \int \mathrm{d}\boldsymbol{p}'\, \mathrm{d}\boldsymbol{k}\, \delta(E_k - E_{(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')/2}) \operatorname{Im}\left[\left\langle \frac{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'}{2} \right| T_{\pm}(E_k + iO) \left| \boldsymbol{k}\right\rangle^* \nabla_p \left\langle \frac{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'}{2} \right| T_{\pm}(E_k + iO) \left| \boldsymbol{k}\right\rangle\right]$$
$$\cdot\ [\nabla_{\boldsymbol{r}} (f_+ f_-) - 2 f(\boldsymbol{p},\boldsymbol{r};t) \nabla_{\boldsymbol{r}} f(\boldsymbol{p}',\boldsymbol{r};t)]. \tag{111}$$

Die physikalische Bedeutung der Korrekturterme, wie sie hier angegeben sind, ist nicht unmittelbar anschaulich zu erfassen, jedoch gelten die entsprechenden qualitativen Aussagen in Abschnitt 2. Es gibt Fragestellungen, wo die K_j teilweise und solche, wo sie völlig belanglos sind. Zum Beispiel kann K_1 in allen Untersuchungen, die der Verfasser bisher anhand der Transportgleichung (107) durchgeführt hat, von vornherein weggelassen werden.

Die noch sehr einfache Form des Stoßterms ist auch unwesentlich. So liegt z.B. die Gleichgewichtsfunktion $g^<(p, E)$ nach (36), (41) und (92) bereits in einer Gestalt vor, die einem wesentlich komplizierteren Stoßglied entspricht.

Der Verfasser dankt Herrn Prof. Dr. S. GROSSMANN für sein förderndes Interesse an dieser Arbeit.